

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SANTA
ESCUELA DE POSGRADO
Programa de Doctorado en Estadística Matemática



UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

**Clasificación de las Pruebas de Normalidad Multivariante
según su desempeño**

**Tesis para optar el grado de
Doctor en Estadística Matemática**

Autor:

Ms. Lozano Salazar, Elías Gregorio
Código Orcid: 0000-0002-4376-628X
DNI N°. 07001387

Asesora:

Dra. González Castro, Jeanette Baldramina
Código ORCID: 0000-0003-4661-7447
DNI N°. 17907323

Línea de Investigación
Simulación estocástica e inferencia estadística

Nuevo Chimbote - PERÚ
2024



CERTIFICACIÓN DE ASESORAMIENTO DE TESIS

Yo, **Jeanette Baldramina, González Castro**, mediante la presente certifico mi asesoramiento de la Tesis Doctoral titulada: **Clasificación de las Pruebas de Normalidad Multivariante según su desempeño**, elaborado por el maestro **Ms. Lozano Salazar, Elías Gregorio**, para obtener el grado de **Doctor en Estadística Matemática** en la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Santa.

Nuevo Chimbote, setiembre de 2024

Dra. González Castro, Jeanette Baldramina

Asesora

CODIGO ORCID: 0000-0003-4661-7447

DNI N° 17907323



UNS
ESCALA DE
POSGRADO

COMFORMIDAD DEL JURADO EVALUADOR

Clasificación de las Pruebas de Normalidad Multivariante según su desempeño

Tesis para optar el grado de Doctor en Estadística Matemática

Revisado y Aprobado por el Jurado Evaluador:

.....
Dr. Pajuelo González, Luís Alfredo
Presidente

CODIGO ORCID: 0000-0003-4568-3434
DNI N°:32761325

.....
Dr. Calderón Yarleque, Luis Alberto
Secretario

Código ORCID: 0000-0002-6870-5096
DNI N° 40097132

.....
Dra. González Castro, Jeanette Baldramina
Vocal

Código ORCID: 0000-0003-4661-7447
DNI N° 17907323



UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

ACTA DE EVALUACIÓN DE SUSTENTACIÓN DE TESIS

A los siete días del mes de setiembre del año 2024, siendo las 11:15. horas, en el aula P-01 de la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Santa, se reunieron los miembros del Jurado Evaluador, designados mediante Resolución Directoral N° 292-2024-EPG-UNS de fecha 23.05.2024, conformado por los docentes: Dr. Luis Alfredo Pajuelo Gonzales (Presidente), Dr. Luis Alberto Calderón Yarleque (Secretario) y Dra. Jeanette Baldramina González Castro (Vocal); con la finalidad de evaluar la tesis titulada "**CLASIFICACIÓN DE LAS PRUEBAS DE NORMALIDAD MULTIVARIADA SEGÚN SU DESEMPEÑO**"; presentado por el tesista **Elías Gregorio Lozano Salazar**, egresado del programa de **Doctorado en Estadística Matemática** .

Sustentación autorizada mediante Resolución Directoral N° 452-2024-EPG-UNS de fecha 03 de setiembre de 2024.


El presidente del jurado autorizó el inicio del acto académico; producido y concluido el acto de sustentación de tesis, los miembros del jurado procedieron a la evaluación respectiva, haciendo una serie de preguntas y recomendaciones al tesista, quien dio respuestas a las interrogantes y observaciones.

El jurado después de deliberar sobre aspectos relacionados con el trabajo, contenido y sustentación del mismo y con las sugerencias pertinentes, declara la sustentación como Aerobodo, asignándole la calificación de 19 - Excelente.

Siendo las 12:20 horas del mismo día se da por finalizado el acto académico, firmando la presente acta en señal de conformidad.


Dr. Luis Alfredo Pajuelo Gonzales
Presidente


Dr. Luis Alberto Calderón Yarleque
Secretario


Dra. Jeanette Baldramina González Castro
Vocal

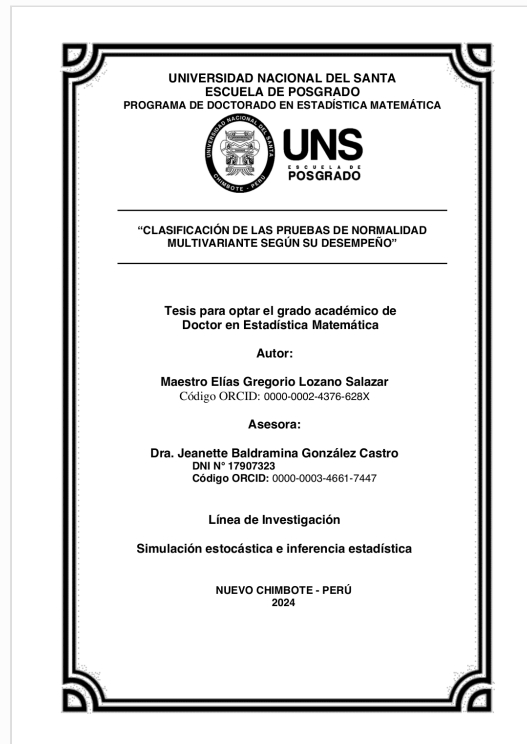


Recibo digital

Este recibo confirma que su trabajo ha sido recibido por Turnitin. A continuación podrá ver la información del recibo con respecto a su entrega.

La primera página de tus entregas se muestra abajo.

Autor de la entrega: Elias Gregorio LOZANO SALAZAR
Título del ejercicio: DOCTORADO 2024 - UNS
Título de la entrega: Clasificación de las pruebas de MVN según desempeño (Elias ...
Nombre del archivo: Clasificación_de_las_pruebas_de_MVN_según_desempeño_Elia...
Tamaño del archivo: 1.21M
Total páginas: 122
Total de palabras: 24,764
Total de caracteres: 117,810
Fecha de entrega: 11-sept.-2024 03:39p. m. (UTC-0500)
Identificador de la entrega... 2443291851



Clasificación de las pruebas de MVN según desempeño (Elias Lozano Salazar).pdf

INFORME DE ORIGINALIDAD

21 %

INDICE DE SIMILITUD

21 %

FUENTES DE INTERNET

4 %

PUBLICACIONES

9 %

TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1	1library.co Fuente de Internet	3 %
2	www.slideshare.net Fuente de Internet	2 %
3	www.droblo.es Fuente de Internet	1 %
4	publicaciones.eafit.edu.co Fuente de Internet	1 %
5	www.researchgate.net Fuente de Internet	1 %
6	statologos.com Fuente de Internet	1 %
7	www.coursehero.com Fuente de Internet	1 %
8	repositorio.unal.edu.co Fuente de Internet	1 %
9	revistas.unjbg.edu.pe Fuente de Internet	

AGRADECIMIENTO

Un agradecimiento especial a la Dra. Jeanette González Castro, mi asesora de tesis, por su profesionalismo, esfuerzo y dedicación brindado en el asesoramiento y por llegar a buen puerto la presente tesis.

DEDICATORIA

A DORIS, POR SER MI ÁNGEL DE LA GUARDA

A MIS HIJOS, POR SU ALIENTO

A CAMILA, POR ESTAR A MI LADO

A MIS HERMANAS Y HERMANO, POR SU APOYO

ÍNDICE

HOJA DE CONFORMIDAD DEL ASESOR	ii
AGRADECIMIENTO	vi
ÍNDICE	viii
LISTA DE TABLAS	x
LISTA DE FIGURAS	xii
RESUMEN	xiii
ABSTRACT	xiv
I. INTRODUCCIÓN	15
1.1. Descripción y formulación del problema de investigación	15
1.2. Objetivos de la investigación	21
1.2.1 Objetivo general	21
1.2.2 Objetivos específicos	21
1.3. Formulación de la Hipótesis de investigación	21
1.4. Justificación e importancia de la investigación	22
1.5. Delimitación de la investigación	24
II. MARCO TEÓRICO	25
2.1. Antecedentes de la investigación	25
2.2. Marco conceptual	29
III. METODOLOGÍA	58
3.1. Métodos de la investigación	58
3.2. Diseño de la investigación	59
3.3. Población y muestra	75
3.4. Variables de estudio	76
3.4.1 Definición conceptual	76
3.4.2 Definición operacional	76
3.4.3 Indicadores	77
3.5. Técnicas e instrumentos de recolección de datos	78
3.6. Técnicas de análisis de los resultados	81
IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN	87
4.1. Resultados	87
4.1.1 Análisis de la Distribución Multivariada Normal	88
4.1.2 Análisis de la Distribución t Multivariada	94
4.1.3 Análisis de la Distribución Cauchy Multivariada	100
4.1.4 Aplicación de la Técnica de Escalamiento Multidimensional	106
4.2. Discusión	115
V. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	119
5.1. Conclusiones	119

5.2. Recomendaciones	120
VI. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	122

LISTA DE TABLAS

Tabla 1: Pruebas de MVN	60
Tabla 2: Características a considerar para la construcción de escenarios de distribución de datos MVN	79
Tabla 3: Escenarios del 1 al 15	79
Tabla 4: Escenarios del 16 al 30	80
Tabla 5: Tasas de error tipo I en distribuciones de datos normal multivariada, con variabilidad generalizada = 1 (Escenarios del 1 al 5)	89
Tabla 6: Tasas de error tipo I en distribuciones de datos normal multivariada, con variabilidad generalizada = 1 (Escenarios del 6 al 10)	90
Tabla 7: Tasas de error tipo I en distribuciones de datos normal multivariada, con variabilidad generalizada = 1 (Escenarios del 11 al 15)	91
Tabla 8: Tasas de error tipo I en distribuciones de datos normal multivariada, con variabilidad generalizada = 100 (Escenarios del 16 al 20)	92
Tabla 9: Tasas de error tipo I en distribuciones de datos normal multivariada, con variabilidad generalizada = 100 (Escenarios del 21 al 25)	93
Tabla 10: Tasas de error tipo I en distribuciones de datos normal multivariada, con variabilidad generalizada = 100 (Escenarios del 26 al 30)	94
Tabla 11: Potencia de la prueba en distribuciones de datos t multivariada con 10 grados de libertad, con variabilidad generalizada = 1 (Escenarios del 1 al 5)	95
Tabla 12: Potencia de la prueba en distribuciones de datos t multivariada con 10 grados de libertad, con variabilidad generalizada = 1 (Escenarios del 6 al 10)	96
Tabla 13: Potencia de la prueba en distribuciones de datos t multivariada con 10 grados de libertad, con variabilidad generalizada = 1 (Escenarios del 11 al 15)	97
Tabla 14: Potencia de la prueba en distribuciones de datos t multivariada con 10 grados de libertad, con variabilidad generalizada = 100 (Escenarios del 16 al 20)	98
Tabla 15: Potencia de la prueba en distribuciones de datos t multivariada con 10 grados de libertad, con variabilidad generalizada = 100 (Escenarios del 21 al 25)	99
Tabla 16: Potencia de la prueba en distribuciones de datos t multivariada con 10 grados de libertad, con variabilidad generalizada = 100 (Escenarios del 26 al 30)	100
Tabla 17: Potencia de la prueba en distribuciones de datos Cauchy multivariada, con variabilidad generalizada = 1 (Escenarios del 1 al 5)	101
Tabla 18: Potencia de la prueba en distribuciones de datos Cauchy multivariada, con variabilidad generalizada = 1 (Escenarios del 6 al 10)	102

Tabla 19: Potencia de la prueba en distribuciones de datos Cauchy multivariada, con variabilidad generalizada = 1 (Escenarios del 11 al 15)	103
Tabla 20: Potencia de la prueba en distribuciones de datos Cauchy multivariada, con variabilidad generalizada = 100 (Escenarios del 16 al 20)	104
Tabla 21: Potencia de la prueba en distribuciones de datos Cauchy multivariada, con variabilidad generalizada = 100 (Escenarios del 21 al 25)	105
Tabla 22: Potencia de la prueba en distribuciones de datos Cauchy multivariada, con variabilidad generalizada = 100 (Escenarios del 26 al 30)	106

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Desempeño de las pruebas de MVN según el MDS para estimaciones de error tipo I	107
Figura 2: Resultado de MDS para determinar los factores que afectan las estimaciones del error tipo I	109
Figura 3: Desempeño de las pruebas de MVN según el MDS para estimaciones de la potencia de la prueba en una distribución t multivariada (10 g.l.)	110
Figura 4: Desempeño de las pruebas de MVN según el MDS para estimaciones de la potencia de la prueba en una distribución Cauchy multivariada	112
Figura 5: Resultado de MDS para determinar los factores que afectan las estimaciones de la potencia de la prueba en una distribución t multivariada con 10 g.l.	113
Figura 6: Resultado de MDS para determinar los factores que afectan las estimaciones de la potencia de la prueba en una distribución Cauchy multivariada.	114

RESUMEN

El supuesto de normalidad multivariante es exigido por muchos métodos estadísticos multivariantes; no obstante, muchos investigadores no comprueban este supuesto. Existen más de 50 pruebas de normalidad multivariante, pero se conoce poco sobre su desempeño. El objetivo de esta tesis es clasificar 15 pruebas de normalidad multivariante en diversos escenarios (combinación de tamaño de la muestra, número de variables y variabilidad generalizada). Se usaron simulaciones de Montecarlo para generar conjuntos de datos con distribuciones multivariantes, se incluyeron la distribución normal multivariante, la distribución multivariada de t y de Cauchy. Se calculó el estadístico de prueba para cada una de las 15 pruebas; el número de rechazos obtenidos se presentaron en cada situación. La contribución de cada prueba estuvo determinada por el error tipo I y la potencia de la prueba del conjunto de datos utilizados. No se encontró una prueba que fuera la más potente en todas las situaciones. Se aplicó la técnica de Escalamiento Multidimensional (MDS) para clasificar las pruebas que tuvieron un desempeño similar y los factores que afectaron su desempeño, encontrándose que no existen diferencias significativas de las pruebas consideradas en la presente investigación.

Palabras clave: Normalidad Multivariada; error tipo I; potencia de prueba; Simulación de Montecarlo, Variabilidad total; Técnica de Escalamiento Multidimensional

ABSTRACT

The assumption of multivariate normality is required by many multivariate statistical methods; however, many researchers do not verify this assumption. There are more than 50 multivariate normality tests, but little is known about their performance. The objective of this thesis is to classify 15 multivariate normality tests in various scenarios (combination of sample size, number of variables and generalized variability). Monte Carlo simulations were used to generate datasets with multivariate distributions, including the multivariate normal distribution, the multivariate distribution of t and Cauchy. The test statistic was calculated for each of the 15 tests; The number of rejections obtained was presented in each situation. The contribution of each test was determined by the type I error and the test power of the dataset used. We did not find one test that was the most powerful in all situations. The Multidimensional Scaling (MDS) technique was applied to classify the tests that had a similar performance and the factors that affected their performance, finding that there are no significant differences in the tests considered in this research.

Keywords: Multivariate normality; type I error; test power; Monte Carlo simulation, total variability; Multidimensional Scaling Technique.

I. INTRODUCCIÓN

1.1 Descripción y formulación del problema de investigación

La presente investigación busca clasificar las pruebas de Normalidad Multivariante (MVN) según su desempeño.

Algunos métodos estadísticos paramétricos multivariantes, como el Análisis de Componentes Principales, Análisis Multivariante de la Variancia (MANOVA), Análisis de Correlación Canónica, Análisis Discriminante lineal y otros; requieren evaluar y comprobar que los datos multivariantes utilizados cumplen con la suposición que presentan MVN, a fin de continuar con la aplicación de los mencionados métodos tal como lo sugieren Canal et al. (1999); Mecklin (2000); Naczk (2004); Selcuk et al. (2014); Porras (2016); Alpu, Ö., & Yuksek, D (2016); Ebner y Henze (2020).

En la presente investigación la abreviatura MVN se utilizará como sinónimo del concepto Normalidad Multivariante por sus siglas en el idioma inglés *MultiVariate Normality* (MVN).

Existen diversas pruebas analíticas y gráficas para comprobar la MVN, sin embargo, no se puede decidir qué prueba es mejor, ya que cada prueba bajo ciertas condiciones genera resultados diferentes; por tanto, según Mecklin (2000) a priori no es posible mencionar que existe un método mejor que los demás, que sea válido para verificar la MVN.

La presente investigación, tiene como objeto de estudio, realizar la clasificación que muestran las pruebas de MVN respecto a la Tasa de error tipo I y la potencia de la prueba obtenidas en las pruebas de MVN aplicadas a la distribución de datos en diferentes escenarios.

Los escenarios, son las condiciones y características que presentan un conjunto de datos, en relación con el número total de variables que intervienen, tamaño de muestra y variabilidad generalizada entre las variables del conjunto de datos.

La mayoría de las mediciones asociadas a una variable se concentran simétricamente dentro de una determinada distancia respecto a un valor central, las demás mediciones se presentan de manera cada vez más escasas a la extrema izquierda o a la derecha, en estos casos la distancia al valor central es más grande. Lo anterior corresponde a una descripción de

las mediciones de una variable cuyos valores se distribuyen conforme a una distribución normal.

Muchos métodos de inferencia estadística, en el caso univariado, se apoyan en el supuesto de distribución normal e independencia entre las observaciones. Peña (2002), menciona que:

diversas metodologías del análisis multivariante también se apoyan en la distribución normal multivariada, considerando las razones siguientes:

- Es una fácil extensión de la distribución normal univariada; tanto en su definición como en su aplicación.
- El número de parámetros asociado requiere de la siguiente cantidad de datos: $(1/2) * p * (p + 3)$.
- Bajo normalidad, las variables aleatorias con covarianza cero son independientes dos a dos y en conjunto, además, recíprocamente, la no correlación implica independencia. Esto no siempre se tiene en otras distribuciones.
- La combinación lineal de variables aleatorias con distribución normal tiene distribución normal.

Los datos multivariantes disponen de ciertos estadísticos que permiten caracterizar una población y estudiar su comportamiento probabilístico, cuando presentan una distribución normal multivariante. La distribución MVN, es la más importante de la teoría estadística y se usa como modelo estadístico para explicar la estructura probabilística de las distribuciones multivariantes y realizar inferencias sobre los parámetros.

El Análisis Multivariante utiliza simultáneamente conjuntos de datos multivariantes en el sentido de que hay varias variables medidas para cada individuo u objeto estudiado. Su razón de ser radica en un mejor entendimiento de la realidad o fenómeno objeto de estudio, lo que permitirá tener un conocimiento cabal de los hechos, obteniendo información que los métodos estadísticos univariantes y bivariantes no permiten conseguir.

Las pruebas para evaluar la MVN abundan. Una revisión actual de la literatura revela que existen muchos procedimientos para probar la MVN. Sin embargo, Rencher (1995) manifestó que, dado que la MVN es más compleja que la normalidad univariante, el "estado del arte" es poco refinado. Existen varias revisiones de diferentes métodos realizadas por Andrews, Gnanadesikan y Wamer (1973), Gnanadesikan (1977), Mardia (1980), Koziol (1986) y Looney (1995), pero ninguno es completamente exhaustivo.

Pocas investigaciones han evaluado la calidad y la potencia de estas pruebas de MVN. Las investigaciones realizadas por Horswell (1990), Horswell y Looney (1992), Romeu y Ozturk (1993), Young, Seaman y Seaman (1995) y Bogdan (1999), comparan la potencia de las pruebas de MVN.

Algunas pruebas disponibles para comprobar la normalidad multivariante son extensiones de las pruebas de normalidad univariante. Otras pruebas de MVN se basa en gráficos, medidas de asimetría o curtosis, o procedimientos de bondad de ajuste. Pero, pocos de estos son

verdaderamente formales, en el sentido de que se ha encontrado la distribución nula de la prueba estadística y se ha establecido la consistencia de la misma, Koziol (1983), Bogdan (1999). Para Baringhaus y Henze (1988) hay pocas pruebas "genuinas" de normalidad multivariante.

Por diversas razones, según Baxter (1997) el supuesto de normalidad multivariante a menudo no se comprueba, para Horswell (1990) estas pruebas son "en gran medida curiosidades académicas, rara vez utilizadas por los estadísticos en activo". Según Looney (1995), las posibles explicaciones de esta omisión por parte de los profesionales se deben a las siguientes razones:

- a) Se desconoce la existencia de pruebas de normalidad multivariante o no las consideran como necesarias para los análisis.
- b) No se dispone de aplicaciones informáticas adecuadas para calcular la prueba estadística o el valor p de una prueba de normalidad multivariante. (Como es el caso del *SPSS*, *Statgraphics* y *Minitab*).
- c) Se sabe poco acerca de los indicadores de desempeño que se debe considerar en una prueba estadística de la MVN.
- d) El profesional no realiza pruebas de MVN porque no está seguro de cómo proceder si se detecta la no normalidad en sus datos.

Existe abundante literatura sobre la comprobación de la normalidad, y esto se debe a que no se ha encontrado un procedimiento único que sea potente en todas las posibles alternativas, o desviaciones de la normalidad. Las

diferentes posibles variaciones de la normalidad son interminables, Andrews, Gnanadesikan y Wamer (1973) opinan que "buscar un único método mejor no parece ser ni pragmáticamente sensato ni necesario".

La presente investigación busca clasificar qué pruebas para comprobar la normalidad multivariante tienen buen desempeño. Es posible que no exista una prueba que, en cualquier escenario dado, brinde la seguridad de probar el supuesto de que los datos presentan MVN, quizás existan pruebas para cada situación dada y los escenarios en que tengan mejor desempeño están determinados por ciertas características y condiciones. Para determinar la contribución de cada prueba se consideró el error tipo I y la potencia de la prueba de los conjuntos de datos utilizados.

Formulación del problema de Investigación

En vista que existe una situación, en la que no es posible contar con una sola prueba, que bajo ciertas características y condiciones de los datos, nos indique con certeza, que éstos presentan el supuesto de MVN; la presente investigación, busca clasificar las pruebas que evalúan si la distribución de los datos presentan el supuesto de MVN, de acuerdo a escenarios establecidos por el tamaño de muestra, número de variables que intervienen, y la variabilidad generalizada; y luego clasificarlas según el error tipo I y la potencia de la prueba, aplicando la técnica de Escalamiento Multidimensional (MDS), de tal modo que permita conocer en qué condiciones son confiables.

En la situación descrita, el problema de la presente investigación queda formulado en la siguiente interrogante: ¿Cómo se clasifican las pruebas de MVN, según su desempeño, de acuerdo a escenarios determinados por el tamaño de muestra, número de variables que intervienen y la variabilidad generalizada presente en la distribución de los datos?

1.2 Objetivo de la investigación

1.2.1 Objetivo general

El Objetivo de la presente investigación, es determinar la clasificación de las pruebas MVN según su desempeño, de acuerdo a escenarios establecidos por el tamaño de muestra, número de variables que intervienen y la variabilidad generalizada, presentes en la distribución de los datos.

1.2.2 Objetivos específicos

- a) Clasificar las pruebas de MVN que rechazan la hipótesis nula de normalidad multivariante en el nivel alfa establecido con datos de una distribución MVN, utilizándose la tasa de error tipo I.
- b) Clasificar las pruebas de MVN que son más potentes contra distribuciones de datos t multivariada y Cauchy multivariada, utilizándose la potencia de la prueba.

1.3 Formulación de la Hipótesis de investigación

Existen dos clases de pruebas de MVN según su desempeño, de acuerdo con escenarios determinados por la condición de tamaño de muestra,

número de variables que intervienen y la variabilidad generalizada presente en la distribución de los datos.

1.4 Justificación e importancia de la investigación

En términos prácticos, la prueba MVN es vital no sólo para evitar la inflación de la tasa del error tipo I, sino también para respetar la realidad donde la mayoría de los efectos tienen múltiples causas y múltiples consecuencias. Por esta razón, muchos métodos estadísticos multivariantes, recurren a la búsqueda de una prueba que le indique que sus datos cumplen con el supuesto de MVN.

Metodológicamente, cuando se usa datos MVN, no basta aplicar pruebas individuales de la normalidad, ya que como lo indica el matemático Bellman (1961) existe la “maldición de la dimensionalidad”, que consiste en el aumento de la complejidad de un problema al aumentar el número de las variables involucradas, lo cual se manifiesta de dos formas: a) Al aumentar variables, el espacio está cada vez más vacío, haciendo más difícil cualquier proceso de inferencia a partir de los datos. Esto es consecuencia de que, al aumentar el espacio de las variables aumenta su volumen (o su hipervolumen en general), y como la masa total de probabilidad es la unidad, la densidad de la variable aleatoria debe disminuir. b) Un segundo problema es que el número de parámetros necesario para describir los datos aumenta rápidamente con la dimensión. Para representar en la dimensión p la media y la matriz de covarianzas necesita $p(p + 3)/2$ datos, por tanto, la complejidad de los datos, medida por el número de parámetros necesarios para

representarlos, crece, en este caso, con el cuadrado de la dimensión del espacio.

Los resultados de las pruebas MVN se ven afectado por ciertas desviaciones de la normalidad. Las pruebas de hipótesis que implican vectores medios son más sensibles a la asimetría, mientras que las pruebas que implican matrices de varianza-covarianza son más sensibles a la curtosis. Sin embargo, el supuesto de MVN a menudo no se comprueba, las posibles explicaciones de esta omisión por parte de los profesionales incluyen diversos factores. Justamente la existencia de una amplia bibliografía sobre la comprobación de la MVN, se debe a que no existe una única prueba potente contra todas las posibles alternativas o desviaciones, de la normalidad, por lo que es necesario establecer una clasificación en la cual se indique en qué condiciones una prueba es más conveniente aplicarse, lo cual beneficiaría en precisar y explicar la situación que se estudia en beneficio de la ciencia y de la sociedad.

En el aspecto teórico, se tendrá aportes en la clasificación de las pruebas de MVN, estableciendo una taxonomía de las pruebas, más allá de los enfoques utilizados para su aplicación.

Importancia de la investigación

Por las razones expuestas, la importancia de la presente investigación radica que al establecer la comparación de las pruebas y una clasificación de las condiciones que le son más propicias para su aplicación, se tomará en

cuenta su comportamiento y dispersión, estableciendo que lo sustancial en el análisis de datos es obtener un conjunto de variables que reflejen la realidad que se estudia y en la cual se pretende aplicar métodos que se basan en técnicas estadísticas paramétricas (basadas en la distribución MVN).

1.5 Delimitación de la investigación

- a) No existe un inventario o registro sistematizado de todas las pruebas de MVN que han sido desarrolladas, a la actualidad. La literatura menciona que existen más de 50 pruebas, alguna de las cuales solo se les menciona sin dar mayor detalle de su característica matemática y estadística.

- b) Muchas de las pruebas de MVN no existen en los programas estadísticos más utilizados, por lo que se debe generar códigos o programas informáticos ah-hoc para realizar los cálculos.

II. MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes de la investigación

En la investigación de Zumaqué (2021), se comparan 16 pruebas de normalidad univariadas, en la cual se argumenta que “donde se requiere un rigor académico, las pruebas de normalidad son fundamentales puesto que de esto depende una decisión muy fuerte”, es decir aún no está agotado el tema de la normalidad para datos univariados, con mayor razón se puede argumentar que en el tema de la normalidad multivariante, hay aún mucho por estudiar y analizar, a pesar de los trabajos realizados por Canal et al . (1999), Mecklin y Mundfrom (2000), Naczk (2004), Selcuk (2014), Porras (2016), Alpu, Ö., & Yuksek, D (2016), Ebner y Henze (2020).

Ebner y Henze (2020), en una reciente investigación, difunden los nuevos desarrollos en las pruebas invariantes afines para la MVN, en la cual se da

énfasis a las propiedades asintóticas de varias clases de estadísticas L^2 ponderadas. A partir de las pruebas invariantes se revisa otras pruebas, como la prueba de energía de Szekely (2005), la prueba de Pudelko (2005), la de Manzotti y Quiroz (1999).

Alpu, Ö., & Yuksek, D (2016), mencionan la importancia de saber si los conjuntos de datos son normales o no normales, en las ciencias médicas y de la vida. Para tal fin comparó las tasas de error de la potencia y tipo I de seis pruebas de normalidad multivariante más utilizadas. De las comparaciones realizadas sobre la potencia de las pruebas, determinó que algunas pruebas tienen mal rendimiento y resultados sesgados, mientras que otras proporcionaron buenos resultados cuando fueron aplicadas a diferentes alternativas de distribución de datos normal, no normal y mezclas de estas.

Porras (2016), utilizó la simulación de Monte Carlo para comparar cuatro pruebas de normalidad multivariante (Mardia, Henze-Zinkler, Shapiro-Wilk Generalizada y Royston), en dicha investigación se determinó que no existen diferencias significativas en las pruebas consideradas en dicha investigación.

Selcuk (2014), concluyó que, a pesar de existir muchos métodos analíticos propuestos para comprobar la normalidad multivariante, decidir qué método usar es complicado, ya que cada método puede dar resultados diferentes bajo ciertas condiciones. Se puede afirmar que no existe el mejor método,

que sea válido bajo ninguna condición, para verificar la normalidad. Indica que además de los resultados numéricos, se debe utilizar métodos gráficos para decidir sobre la normalidad multivariante, esta combinación de resultados numéricos de varios métodos con enfoques gráficos puede proporcionar decisiones más confiables.

En la tesis realizada por Naczk (2004), se evaluó tres pruebas de MVN, que considera tiene alto poder en la detección de desviaciones de la normalidad multivariante. Para el estudio se seleccionó la prueba de Royston (1983b) (una extensión de la prueba Shapiro-Wilk (1965)) y la prueba de Henze-Zirkler (1990); que es la única prueba en la tesis perteneciente a la clase de pruebas invariantes y consistentes. También consideró la prueba de Doornik-Hansen (1994), una prueba basada en medidas de asimetría y curtosis.

Los resultados preliminares demostraron una aparente debilidad de la prueba estadística de Royston (1983b) al comparar el nivel de significación empírica con el nominal; en particular, el primero resultó ser mucho más bajo. Se consideró una nueva prueba de Royston (1992) en dicho estudio y la prueba de Royston (1983b) también, para compararlas con las otras pruebas consideradas.

Los resultados obtenidos, no proporcionaron evidencias suficientes para recomendar alguna de las pruebas examinadas como una prueba superior para evaluar la normalidad multivariante; sin embargo, Naczk (2004) sugiere que la prueba de Henze-Zirkler (1990) es la única prueba que podría

recomendarse.

Mecklin y Mundfrom (2000), realizaron un estudio, cuyo propósito fue examinar el poder de 13 pruebas prometedoras de normalidad multivariante bajo una variedad de condiciones. Se usaron simulaciones de Monte Carlo para generar 10,000 conjuntos de datos a partir de muchas distribuciones multivariantes, incluida la distribución normal multivariante, mezclas normales, distribuciones contorneadas elípticamente y distribuciones muy sesgadas. Las pruebas estadísticas para cada procedimiento fueron calculadas y comparadas con el valor crítico apropiado. Para cada situación se presentó el número de rechazos de la hipótesis nula de normalidad multivariante.

No se encontró que una sola prueba fuera la más potente en todas las situaciones. Finalmente, se recomendaron uso de la prueba de Henze-Zirkler para una prueba formal de la hipótesis nula de la normalidad multivariante; y el uso de procedimientos complementarios como las medidas de asimetría y curtosis de Mardia y la gráfica chi-cuadrado o beta para diagnosticar la causa de la no normalidad.

Canal et al (1999), basándose en el trabajo germinal de Mardia (1970) dio definiciones multivariantes de asimetría y curtosis que son usadas en pruebas de multinormalidad, y han dado origen a gran variedad de extensiones y formalizaciones. Se mostró que las pruebas formales de bondad de ajuste basados en el principio de Score de Rao y la noción de

pruebas suaves de Neyman no son mejores que los basados en estadísticos que generalizan las nociones de asimetría y curtosis.

2.2 Marco conceptual

El uso de la distribución normal para modelar los datos en las aplicaciones estadísticas se debe a que muchas de las técnicas estadísticas asumen la normalidad de los datos observados; sin embargo, existen diversas pruebas para determinar si los datos siguen una distribución específica, tanto univariada como multivariada.

Evaluar el supuesto de que un conjunto de datos presenta distribución normal es uno de los asuntos más delicados de la Estadística en general y del análisis multivariante en particular por lo complejo y difícil de los procedimientos clásicos multivariantes.

Es necesario presentar la importancia de la normalidad multivariante (MVN) y el contexto de los alcances teóricos conceptuales que se deben tener en cuenta en su aplicación y el desarrollo que se ha venido construyendo en su evolución y estado de arte de las pruebas para probar el supuesto de MVN.

Análisis Multivariante y normalidad de los datos

La medición de varias características de una misma unidad de estudio genera un conjunto de datos que deben ser analizados con técnicas multivariantes. En este caso, se disponen de ciertos estadísticos que permiten caracterizar una población y evaluar su comportamiento

probabilístico, siendo la distribución normal la más importante de la teoría estadística.

La distribución normal Multivariante, servirá para explicar la estructura probabilística de las distribuciones multivariantes y realizar inferencias sobre los parámetros.

El Análisis Multivariante es el conjunto de métodos estadísticos cuya finalidad es analizar simultáneamente conjuntos de datos multivariantes y permiten un mejor entendimiento del objeto de estudio, siendo sus objetivos a) Proporcionar métodos cuya finalidad es el estudio conjunto de datos multivariantes que no se puede conseguir con el análisis estadístico unidimensional o bidimensional y b) Ayudar al investigador a tomar decisiones óptimas en el contexto en el que se encuentre, teniendo en cuenta la información disponible por el conjunto de datos analizados.

El análisis multivariante es una parte de la estadística difícil de definir y delimitar. Se ocupa de diversas técnicas que, si bien muchas de ellas fueron desarrolladas por autores clásicos, su puesta en práctica se debe al advenimiento del hardware y software informático y a la creciente demanda de diferentes disciplinas, como la Sociología, Psicología, Biología, Medicina o Economía. Peña (2002).

La normalidad multivariante (la combinación de dos o más variables) implica que las variables individuales son normales en un sentido univariante y que

sus combinaciones también. Entonces, si una variable es una normal multivariante, es también normal univariante; sin embargo, lo contrario no es necesariamente cierto (dos o más variables normales univariantes no son necesariamente normal multivariantes). Una situación en la que todas las variables exhiben normalidad univariante ayudará a obtener normalidad multivariante, aunque no la garantiza, en este caso la normalidad multivariante es mucho más difícil de contrastar, aunque existen varias pruebas para situaciones particulares, como se mostrará más adelante.

Montanero (2008), indica que:

Las diversas técnicas multivariantes pueden clasificarse por distintos criterios. Por los tipos de relaciones examinadas, la relación es de dependencia cuando una o varias de las variables estudiadas son explicadas por el resto; las primeras se denominan variables dependientes y las segundas, explicativas. En tanto, la relación de interdependencia se da cuando no hay algún tipo de distinción entre variables, ya que todas ellas actúan de manera intercambiables. No obstante, estos tipos de relación pueden subdividirse en función de la naturaleza de las variables (distinguiendo entre métricas y no métricas), aunque no todas las técnicas se ajustan a esta clasificación.

También están las ecuaciones estructurales, que determinan la relación de dependencia o independencia que tienen las variables latentes y las variables observadas que intervienen a través de la integración de

ecuaciones lineales. Las variables observadas se pueden medir de manera directa, por lo general mediante cuestionarios. Las variables latentes son aquellas que no son medidas directamente, y pueden ser endógenas (dependientes) o exógenas (independientes).

Otro criterio para clasificar las técnicas multivariantes, según Montanero (2008):

consiste en distinguir si la técnica en cuestión supone una generalización multivariante a partir de una univariante o no. Así, el MANOVA análisis multivariante de la varianza o **MANOVA** (por su nombre en inglés, *Multivariate analysis of variance*) generaliza el ANOVA; la regresión lineal multivariante generaliza la regresión lineal múltiple, que a su vez generaliza la simple; los coeficientes de correlación canónica generalizan el coeficiente de correlación múltiple que a su vez generaliza la correlación simple; la prueba M de Box generaliza la de Barlett.

Las relaciones de las variables que se encuentran en un conjunto de datos a analizar son de tres tipos: 1) Datos con variables dependientes, 2) Datos con variables de interdependencia y 3) Datos con variables estructurales: a estas variables se le puede emplear cualesquiera de las técnicas multivariadas; sin embargo, en el caso de los datos, se debe tener en cuenta qué tipo de distribución presentan y qué supuestos deben cumplir estos datos.

Respecto de las distribuciones multidimensionales que desempeñan un papel fundamental en los modelos normales multivariantes, se tiene las distribuciones normal multivariante y matricial, la distribución T^2 de Hotelling, Log Normal y la distribución de Wishart.

Para Hair et al. (2004), la Distribución Normal:

es una distribución de probabilidad continua puramente teórica en la que el eje horizontal representa todos los posibles valores de una variable y el eje vertical representa la probabilidad de que ocurran esos valores. Los valores de la variable están agrupados en torno a la media de forma simétrica y unimodal, conocida como la curva en forma de campana de Gauss o normal.

Cuando se busca representar los datos de una sola variable, mediante un histograma y superponer la curva de una distribución normal con la misma media y desviación estándar que muestran los datos de dicha variable, a esto se le conoce como: Distribución Normal Univariada, y cuando se representa los datos de dos variables aleatorias, se tiene la Distribución Normal Bivariada. Entonces, si se plantea una generalización de la distribución normal univariada con $p \geq 2$ dimensiones, y consecuentemente, para un vector $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)'$ $\sim N_p(\mu, \Sigma)$ según:

$$f(\mathbf{x}; \mu, \Sigma) = \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{\{\sqrt{2\pi}\}^p} e^{\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)}$$

siendo $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_p)'$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p)'$ y $\Sigma = (\sigma_{ij})$ una matriz definida

positiva, que es la matriz de covarianzas, tenemos una Distribución Normal Multivariante,

Por otro lado, una Distribución T^2 de Hotelling, según Peña (2002):

Si x es un vector aleatorio $N_p(\mu, \mathbf{V})$, la variable $(x - \mu)' \mathbf{V}^{-1}(x - \mu)$ es una χ^2 con p grados de libertad. Si sustituimos \mathbf{V} por su estimación \hat{S} , la matriz de varianzas muestral dividiendo por $n-1$, la distribución que se obtiene se denomina T^2 de Hotelling. En general, si $x \sim N_p(\mu, \mathbf{V})$ y $(n - 1)\hat{S} \sim W_p(n - 1, V)$, la distribución de la variable escalar:

$$T^2 = (x - \mu)' \hat{S}^{-1} (x - \mu)$$

que representa la distancia de Mahalanobis entre una variable y su media poblacional, pero calculada con la matriz de covarianzas estimada, se denomina distribución T^2 de Hotelling con p y $n - 1$ grados de libertad.

La Distancia de Mahalanobis, es la distancia entre dos puntos en un espacio multivariado. En un espacio euclidiano regular, las variables (por ejemplo, x , y , z) se representan mediante ejes trazados en ángulo recto entre sí; la distancia entre dos puntos cualesquiera se puede medir con una regla. Para variables no correlacionadas, la distancia euclidiana es igual a la Distancia de Mahalanobis. Sin embargo, si dos o más variables están correlacionadas, los ejes ya no están en ángulo recto y las mediciones se vuelven imposibles con una regla. Además, si tiene más de tres variables, no puede trazarlas en un espacio 3D regular. La Distancia de Mahalanobis resuelve este problema

de medición, ya que mide distancias entre puntos, incluso puntos correlacionados para múltiples variables.

La distribución log normal, a veces llamada distribución de Galton, es una distribución de probabilidad cuyo logaritmo tiene una distribución normal. La distribución log normal se puede utilizar cuando la cantidad de interés debe ser positiva, ya que $\log(x)$ solo se da cuando el valor de x es positivo.

La Distribución Wishart, según Cuadras (2014):

La distribución de Wishart es la que sigue una matriz aleatoria simétrica definida positiva, generaliza la distribución ji-cuadrado y juega un papel importante en la inferencia multivariante. Si las filas de la matriz $\mathbf{Z}_{n \times p}$ son independientes $N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$ entonces diremos que la matriz $\mathbf{Q} = \mathbf{Z}' \mathbf{Z}$ es Wishart $W_p(\Sigma, n)$; con parámetros Σ y n grados de libertad.

Finalmente, una Distribución Marginal, es la distribución de probabilidad de un subconjunto de variables aleatorias de un conjunto de variables aleatorias. La distribución marginal proporciona la probabilidad de un subconjunto de valores del conjunto sin necesidad de conocer los valores de las otras variables.

En relación a los datos, el supuesto de normalidad multivariante de las observaciones es fundamental, ya que sobre ellos se construye el modelo a utilizar. Tal como lo indica Montanero (2008):

La evaluación de los supuestos de normalidad univariada, bivariada o multivariada es uno de los aspectos subjetivos más delicados de la Estadística y del análisis multivariante en especial, ya que resulta difícil imaginarse y aceptar la normalidad multivariante de un vector aleatorio con dimensión mayor a tres, ya que no se puede ilustrar o graficar de alguna manera.

Con la finalidad de evaluar si un conjunto de datos cumple con el supuesto de normalidad, se debe establecer la prueba estadística correspondiente, según Montanero (2008):

Una prueba estadística es el mecanismo para evaluar la evidencia que proporcionan los datos para probar una hipótesis. Esta hipótesis se denomina **hipótesis nula**, y estadísticamente se expresa como **H_0** . Bajo la H_0 , los datos se generan mediante procesos aleatorios. Los procesos controlados no afectan a los datos. Generalmente, la H_0 establece la igualdad y se opone a la **hipótesis alternativa**, denominada **H_a** . La mayoría de las veces, la hipótesis alternativa es aquella que el usuario busca demostrar.

Si los datos no proporcionan suficiente evidencia contra H_0 , la H_0 no se rechaza. Pero si muestran una fuerte evidencia contra H_0 , la H_0 se rechaza, y H_a se considera verdadera con un riesgo cuantificado de ser errónea. Una prueba estadística permite rechazar / no rechazar H_0 .

En el diseño de una investigación, se especifica un nivel de riesgo por encima del cual H_0 no debería ser rechazada. Este nivel se conoce como nivel de significación α (alfa), y debería estar entre 0 y 1. Valores bajos de alfa son más conservadores. La elección de alfa dependerá del riesgo de rechazar H_0 en el caso de que sea verdadera. En la mayoría de los casos, alfa se fija en 0.05, o 0.01. La prueba estadística produce una probabilidad denominado valor p (cuyos límites son 0 y 1). El valor p es la probabilidad de obtener los datos más extremos bajo la hipótesis nula. Si $p > \alpha$, no se rechaza la H_0 , pero no implica que se debe aceptarla, la prueba estadística no ha sido suficientemente "fuerte" para producir un valor p inferior a alfa.

La capacidad de una prueba estadística para conducir al rechazo la hipótesis nula, se le denomina potencia estadística. La potencia estadística aumenta con alfa, con la precisión de las medidas y con el número de repeticiones. La potencia cambia asimismo de acuerdo con el tipo de pruebas estadísticas que se utilizan. La potencia puede calcularse antes o después de un experimento. Equivale a uno, menos el riesgo de ser errónea cuando se acepta H_0 (también denominado riesgo beta). Así, mientras mayor sea la potencia, menor es el riesgo de equivocarse al aceptar H_0 .

Entre las pruebas más conocidas se tiene:

La prueba de Bartlett es sensible a las desviaciones de la normalidad. Es decir, si las muestras provienen de distribuciones no normales, entonces la prueba de Bartlett se puede aplicar para probar la no normalidad. Peña (2002).

La Prueba de Bondad de ajuste, se utiliza para comprobar si los datos de la muestra se ajustan a una distribución de una determinada población (es decir, una población con una distribución normal o una con una distribución de Weibull). En otras palabras, indica si los datos de la muestra representan los datos que esperaríamos encontrar en la población real. Las pruebas de bondad de ajuste comúnmente utilizadas son: La prueba Chi-cuadrado, la prueba de Kolmogórov-Smirnov, la prueba de Anderson-Darling y la prueba de Shapiro-Wilk. Montanero (2008).

La Prueba de Cramer-von Mises, se emplea para juzgar la bondad de una función de distribución acumulada comparada con una función de distribución empírica, o para comparar dos distribuciones empíricas. También se utiliza como parte de otros algoritmos, tal como la estimación de la distancia mínima. Montanero (2008).

La Prueba M de Box, es una prueba estadística multivariante que se utiliza para verificar la igualdad de múltiples matrices de varianza-covarianza. La prueba se usa comúnmente para probar el supuesto de homogeneidad de varianzas y covarianzas en MANOVA y análisis discriminante lineal. Peña (2002).

Una Prueba ómnibus, es una prueba estadística general o global que prueba la significancia de varios parámetros en un modelo a la vez. Peña (2002).

Es necesario tener en cuenta que la consistencia de la prueba estadística es

una propiedad de la conveniencia de los estimadores. En esencia, un estimador es consistente si, a medida que aumenta la información, es decir, el tamaño de la muestra, su distribución de probabilidad se concentra en el valor del parámetro a estimar.

Enfoques de clasificación de las pruebas de MVN

Las primeras pruebas MVN datan desde 1970, con las pruebas de Mardia. Según Mecklin (2002), “No faltan los métodos propuestos para evaluar la normalidad multivariante. Una revisión actual de la literatura reveló que existen más de 50 procedimientos para probar la MVN.”

Canal et al. (1999), comparó la potencia en pruebas de MVN con enfoque en la Asimetría y la Curtosis, del mismo modo Mecklin (2000) también examinó la potencia de la prueba de 13 pruebas de MVN; más recientemente autores como Naczk (2004), Selcuk (2014), Porras (2016), Alpu, Ö., & Yuksek, D (2016) y Ebner (2020), han realizado investigaciones acerca de la comparación de pruebas de MVN.

En la revisión de literatura, se observa un incremento de estudios acerca de las pruebas de MVN. La mayor parte de estos estudios se han centrado en realizar comparaciones o pruebas de simulaciones con datos.

Hay varias formas de categorizar las pruebas para evaluar la normalidad multivariante. Cox y Small (1978), categorizaron las pruebas según la dependencia de coordenadas o la invariancia afín, mientras que Ward (1988)

categorizó las pruebas en función de si eran combinaciones de procedimientos univariados o pruebas que se asumía eran verdaderamente multivariantes. Romeu y Ozturk (1993) categorizaron de manera más específica las pruebas de MVN en seis categorías con características comunes: I) procedimientos esencialmente multivariantes, II) métodos multivariantes de análisis marginal, III) métodos de regresión, IV) métodos basados en el principio de unión-intersección, V) métodos geométricos, y VI) métodos de proyección.

En el trabajo Mecklin (2000), se revisa las categorías tal como lo plantearon Baringhaus, Danschke y Henze (1989), en el cual consideraron cuatro enfoques: Enfoques gráficos y correlacionales, Enfoques de asimetría y curtosis, Enfoques de bondad de ajuste y Enfoques consistentes (basado en la Función Generatriz de Momentos y Función Característica)

Enfoque gráfico y correlacional

El uso del gráfico de probabilidad cuantil-cuantil (Q-Q), es un enfoque informal como prueba de la normalidad univariante. Si el gráfico tiene un comportamiento lineal, indica que existe normalidad. Una prueba de hipótesis más formal puede basarse en la correlación del gráfico Q-Q. Este enfoque para evaluar la normalidad multivariante fue ampliado por con el gráfico de chi-cuadrado.

Singh (1993) desarrolló dos versiones de la prueba basada en la correlación del gráfico beta. En una versión utilizó los estimadores clásicos estándar para

el vector medio y la matriz de varianza-covarianza para calcular las distancias Mahalanobis y la segunda versión utilizó estimadores M robustos para el vector medio y la matriz de varianza-covarianza, Maronna (1976). La versión robusta de esta prueba se desarrolló para aliviar el hecho de que los valores atípicos multivariantes influirían en gran medida en el valor calculado de las distancias de Mahalanobis y por tanto, en el coeficiente de correlación del gráfico beta.

Un gráfico Cuantil-Cuantil permite observar cuan cerca está la distribución de un conjunto de datos a alguna distribución ideal o comparar la distribución de dos conjuntos de datos. Singh (1993).

Enfoque en la asimetría y curtosis

Mardia (1970), introdujo las medidas multivariantes de asimetría y curtosis en el campo de las pruebas de normalidad multivariantes, particularmente su prueba basada en curtosis multivariante es probablemente la prueba más utilizada para probar la normalidad multivariante. En investigaciones de Ward (1988), Horswell (1990), Horswell & Looney (1992), Romeu & Ozturk (1993), Bogdan (1999), se indica que los procedimientos de Mardia, en particular la prueba de asimetría, se encuentran entre las pruebas más utilizadas.

Las medidas de asimetría son indicadores que permiten establecer el grado de simetría (o asimetría) que presenta una distribución de probabilidad de una variable aleatoria. Como eje de simetría consideramos una recta paralela al eje de ordenadas que pasa por la media de la distribución. Si una

distribución es simétrica, existe el mismo número de valores a la derecha que a la izquierda de la media, por tanto, el mismo número de desviaciones con signo positivo que con signo negativo. Hay asimetría positiva (o a la derecha) si la "cola" a la derecha de la media es más larga que la de la izquierda, es decir, si hay valores más separados de la media a la derecha. Hay asimetría negativa (o a la izquierda) si la "cola" a la izquierda de la media es más larga que la de la derecha, es decir, si hay valores más separados de la media a la izquierda.

Lo opuesto a la asimetría, es la Simetría, que para Hair et al. (2004) es:

Una Medida de la simetría de una distribución; en muchos casos la comparación se hace para una distribución normal. Una distribución simétrica positiva contiene pocos valores elevados y se inclina hacia la derecha, y una distribución simétrica negativa tiene pocos valores bajos y se inclina hacia la izquierda. Cuando los valores de simetría caen fuera del rango de -1 a +1 indican una distribución sustancialmente simétrica.

Por otro lado, la Curtosis es la medida del apuntamiento o llanura de una distribución cuando se compara con una distribución normal. Un valor positivo indica una distribución relativamente puntiaguda y un valor negativo indica una distribución relativamente plana.

En este tipo de enfoque se cuenta con las pruebas planteadas a partir de las marginales de la asimetría y curtosis de Small (1980), la prueba que utiliza el

principio de Score de Rao de Bera – John (1983), la prueba a partir de componentes principales de Srivastava (1984), Doornik-Hansen (1994), las pruebas de asimetría y curtosis de Kankainen – Taskinen - Oja (2007), así como las versiones “ómnibus” de Mardia–Foster(1983) y Mardia–Kent, (1991), que combinan elementos de asimetría y curtosis.

Enfoque en la bondad de ajuste

Algunos investigadores han ampliado los procedimientos de bondad de ajuste univariante al caso general multivariante para proponer una prueba de normalidad multivariante, lo que da lugar a las pruebas extendidas de Hawkins (1981), quien propuso una extensión del estadístico de Anderson-Darling para comprobar la normalidad y la homocedasticidad; Paulson, Roohan y Sullo (1987) propusieron una prueba similar. Ambos procedimientos convierten las distancias de Mahalanobis al cuadrado en una estadística que tendrá una distribución uniforme si se mantiene la distribución normal multivariante. En esa misma lógica se tiene las pruebas propuestas por Romeu y Ozturk (1993) y Mudholkar-Srivastava-Lin (1995).

Koziol (1982) propuso una prueba ampliando la prueba de Cramer-von Mises para emplear las distancias de Mahalanobis ordenadas al cuadrado y los estadísticos de orden esperado aproximados de la distribución chi-cuadrado utilizada originalmente por Healy (1968). La prueba de Koziol tiene una potencia relativamente alta en los estudios de comparación de Romeu y Ozturk (1993) y Young, Seaman y Seaman (1995).

También se tiene las pruebas de Royston (1983) y Mudholkar, Srivastava y Lin (1995) y Villasenor - Alva – González (2009), las cuales han extendido, para el caso multivariante, la prueba de Shapiro-Wilk (1965).

Enfoque coherente (basados en la Función Generatriz de Momentos y Función Característica)

Un estadístico es consistente si converge en probabilidad al parámetro que está estimando y generalmente se considera una propiedad matemáticamente deseable Hogg & Craig (1995). Baringhaus y Henze (1988), ampliaron la prueba de normalidad univariante basada en la función característica empírica de Epps y Pulley (1983) al caso multivariante, Csorgo (1989) demostró su consistencia frente a todas las alternativas y Henze - Zirkler (1990) la ampliaron a la forma actual.

La prueba estadística de Henze-Zirkler(1990) se basa en el uso de funciones características para medir la distancia entre la función hipotetizada (es decir, la normal multivariante) y la función observada, o empírica. Para que la consistencia se mantenga, esta distancia debe ser igual a cero, si y sólo si los datos observados son normales multivariantes. Extensas derivaciones permitieron obtener una forma cerrada para el estadístico de Henze-Zirkler, que tiene una distribución log normal aproximada. El resultado de la consistencia implica la fuerte posibilidad de que esta prueba sea muy competitiva frente a una amplia gama de alternativas.

También se considera en este enfoque a las investigaciones propuestas por

Manzotti & Quiroz (2001), Pudielko (2005), Szekely & Rizzo (2005), Volkmer (2014), Henze– Jiménez – Gamero (2019) y Henze -Visagie (2020).

Una Función Generatriz de momentos, define la función generadora de momentos o función generatriz $\Phi_X(t)$ de una variable aleatoria X como la esperanza de e elevado al producto $t \cdot x$, donde t puede ser cualquier número real siempre y cuando la función obtenida sea derivable. Dependiendo del carácter de la función (discreta o continua) la función generatriz se obtendrá por medio de una sumatoria o de una integral:

$$\Phi_X(t) = E(e^{tx}) = \begin{cases} \sum_{x \in R_x} e^{tx} p_x(x) & \text{Si } X \text{ es discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_x(x) & \text{Si } X \text{ es continúa} \end{cases}$$

En la investigación realizada por Zumaqué (2021), se comparan 16 pruebas de normalidad univariadas, en la cual se argumenta que “donde se requiere un rigor académico, las pruebas de normalidad son fundamentales puesto que de esto depende una decisión muy fuerte”, es decir aún no está agotado el tema de la normalidad para datos univariados, con mayor razón podemos argumentar que en el tema de la normalidad multivariante, hay aún mucho por estudiar y analizar, a pesar de los trabajos realizados por Canal et al (1999), Mecklin y Mundfrom (2000), Naczki (2004), Selcuk (2014), Porras (2016), Alpu y Yuksek (2016), Ebner y Henze (2020).

Ebner y Henze (2020), en una reciente investigación, difunden los nuevos desarrollos en las pruebas invariantes afines para la MVN, en la cual se da énfasis a las propiedades asintóticas de varias clases de estadísticas L^2 ponderadas. A partir de las pruebas invariantes se revisa otras pruebas, como la prueba de energía de Szekely (2005) y la prueba de Pudelko (2005).

La propiedad Afín invariante que presenta una prueba estadística cuando evalúa la normalidad multivariante, se mantiene cuando la estadística "permanece inalterada bajo transformaciones afines arbitrarias de los datos subyacentes" Cox y Small (1978).

Alpu, Ö., & Yuksek, D (2016), menciona la importancia de saber si los conjuntos de datos son normales o no normales, en las ciencias médicas y de la vida. Para tal fin comparó las tasas de error de la potencia y tipo I de seis pruebas de normalidad multivariante más utilizadas.

De las comparaciones realizadas sobre la potencia de las pruebas, determinó que algunas pruebas tienen mal rendimiento y resultados sesgados, mientras que otras proporcionaron buenos resultados cuando fueron aplicadas a diferentes alternativas de distribución de datos normal, no normal y mezclas de estas.

Porras (2016), utilizó la simulación de Monte Carlo para comparar cuatro pruebas de normalidad multivariante (Mardia, Henze-Zinkler, Shapiro-Wilk Generalizada y Royston), en dicha investigación se determinó que no existen

diferencias significativas en las pruebas consideradas en dicha investigación.

Selcuk (2014), plantea que, a pesar de existir muchos métodos analíticos propuestos para comprobar la normalidad multivariante, decidir qué método usar es complicado, ya que cada método puede dar resultados diferentes bajo ciertas condiciones. Asimismo, afirma que no existe el mejor método, que sea válido bajo ninguna condición, para verificar la normalidad. Indica que además de los resultados numéricos, se debe utilizar métodos gráficos para decidir sobre la normalidad multivariante, esta combinación de resultados numéricos de varios métodos con enfoques gráficos puede proporcionar decisiones más confiables.

Aunque hay muchas pruebas MVN, no existe una prueba estándar para evaluar la suposición de la prueba de normalidad multivariante, en lugar de usar una sola prueba, los autores sugieren usar varias pruebas simultáneamente y si es posible, sería apropiado, examinar alguna representación gráfica de los datos.

Las pruebas MVN presentarían una clasificación subyacente teniendo en cuenta su desempeño, al examinar en diferentes escenarios construidos por tamaño de muestra, número de variables que intervienen y la variabilidad generalizada y no tanto a un determinado enfoque de clasificación.

A continuación, se presentan otros conceptos relacionados al tema de la investigación.

Afín invariante, es una propiedad que presenta una prueba estadística cuando evalúa la normalidad multivariante, se mantiene cuando la estadística "permanece inalterada bajo transformaciones afines arbitrarias de los datos subyacentes" Cox y Small (1978).

Asimetría, Las medidas de asimetría son indicadores que permiten establecer el *grado de simetría* (o asimetría) que presenta una distribución de probabilidad de una variable aleatoria. Como eje de simetría consideramos una recta paralela al eje de ordenadas que pasa por la media de la distribución. Si una distribución es simétrica, existe el mismo número de valores a la derecha que a la izquierda de la media, por tanto, el mismo número de desviaciones con signo positivo que con signo negativo. Hay asimetría positiva (o a la derecha) si la "cola" a la derecha de la media es más larga que la de la izquierda, es decir, si hay valores más separados de la media a la derecha. Hay asimetría negativa (o a la izquierda) si la "cola" a la izquierda de la media es más larga que la de la derecha, es decir, si hay valores más separados de la media a la izquierda.

Consistencia de la prueba estadística, en estadística, la consistencia es una propiedad de la conveniencia de los estimadores. En esencia, un estimador es consistente si, a medida que aumenta la información, es decir, el tamaño de la muestra, su distribución de probabilidad se concentra en el valor del parámetro a estimar. Peña (2002).

Coefficiente de correlación (r), indica la fuerza de la asociación entre las

variables independientes y la variable criterio. El signo (+ o -) indica la dirección de la relación. Puede tomar valores entre -1 y + 1 con +1 indica una relación positiva perfecta, 0 indicando la ausencia de relación y -1 indica una relación inversa o negativa perfecta (a medida que una crece, otra disminuye). Peña (2002).

Gráfico Cuantil-cuantil, Un gráfico Cuantil-Cuantil permite observar cuan cerca está la distribución de un conjunto de datos a alguna distribución ideal o comparar la distribución de dos conjuntos de datos. Singh (1993).

Curtosis, Medida del apuntamiento de una distribución cuando se compara con una distribución normal. Un valor positivo indica una distribución relativamente puntiaguda y un valor negativo indica una distribución relativamente plana.

Distribución Normal, para Hair et al. (2004):

es una distribución de probabilidad continua puramente teórica en la que el eje horizontal representa todos los posibles valores de una variable y el eje vertical representa la probabilidad de que ocurran esos valores. Los valores de la variable están agrupados en torno a la media de forma simétrica y unimodal, conocida como la curva en forma de campana de Gauss o normal.

Distribución Normal Univariada, Consiste en representar los datos de una sola variable, mediante un histograma y superponer la curva de una

distribución normal con la misma media y desviación estándar que muestran los datos de dicha variable. Hair et al. (2004)

Distribución Normal Bivariada, Cuando se representa los datos de dos variables aleatorias. Hair et al. (2004)

Distribución Normal Multivariada, una distribución normal multivariada es una generalización de la distribución normal univariada con $p \geq 2$ dimensiones, y consecuentemente, para un vector $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)'$ $\sim N_p(\mu, \Sigma)$ según:

$$f(x; \mu, \Sigma) = \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{\{\sqrt{2\pi}\}^p} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)}$$

siendo $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_p)'$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_p)'$ y $\Sigma = (\sigma_{ij})$ una matriz definida positiva, que es la matriz de covarianzas. Montanero (2008)

Estimación Robusta, tal como lo menciona Gómez et al. (2008):

Para caracterizar cualquier tipo de distribución de probabilidad se usan medidas tanto de localización como de escala o dispersión, por ejemplo, la media y la desviación estándar para la distribución normal, respectivamente. Al respecto, Tukey (1960), al evidenciar la inestabilidad de la media y la desviación estándar cuando la muestra se encuentra contaminada con un pequeño porcentaje de datos atípicos, la mediana y la desviación absoluta de la mediana como medidas alternativas para la media y la desviación estándar, por

poseer mejores propiedades de eficiencia bajo este tipo de distribución.

Luego Huber (1981) presentó los fundamentos de las técnicas de estimación robusta desarrollando la estadística matemática subyacente. Hampel (1968) complementó este desarrollo con los conceptos de punto de ruptura y curva de influencia para medir el grado de robustez.

De forma general, para el caso de estimadores robustos lo que se busca es minimizar la distancia entre la variable aleatoriamente y una medida de localización o escala equivalentes a las usadas para la distribución normal, en forma tal, que incorporen las siguientes tres características Maronna (1976): 1) Robustez cualitativa, cuando la medida de localización o escala no se ve afectada ante pequeños cambios en la función de probabilidad, se parte de la continuidad de esta función como punto inicial para garantizar esta propiedad. 2) Robustez infinitesimal: Está ligada al concepto de eficiencia de la estimación y busca que la medida de localización o escala no presente grandes cambios ante pequeñas variaciones de la muestra. Para garantizar esta condición, se requiere que la función, también conocida como función de influencia, que describa los cambios de la medida, sea limitada. 3) Productos robustos: Está definida con base en el punto de ruptura; el cual corresponde a la máxima fracción de datos atípicos que puede contener una muestra antes de que la medida de estimación de localización o escala tienda a infinito.

En síntesis, un estimador es robusto si cumple con tener un punto de ruptura y eficiencia relativa alta, terminando esta última como el nivel de desempeño que tiene un estimador alternativo frente a otro que se evalúa.

Homocedasticidad, para Hair et al. (2004) es:

la descripción de datos en los que la varianza del término de error (ε) aparece constante sobre un rango de variables independiente. El supuesto de igual varianza del error de la población E (donde E es estimado de ε) es decisivo para la apropiada aplicación de la regresión lineal. Cuando el término de error tiene una varianza en aumento u ondulante, se dice que los datos son heterocedásticos.

Interdependencia lineal, Un conjunto se denomina como linealmente independiente si no existen combinaciones lineales entre sus vectores; es decir, cada vector existe por sí mismo dentro del conjunto. Si al combinar linealmente los elementos del conjunto en la forma: $\alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n = 0$, todos los escalares α_i son nulos, entonces el conjunto $\{v_1 + v_2 + \dots + v_n\}$, es linealmente independiente; en otro caso los vectores serán linealmente dependientes. La combinación lineal se conoce como ecuación de dependencia lineal. Montanero (2008)

Invariancia, en matemáticas, invariante es algo que no cambia al aplicarle un conjunto de transformaciones. Más formalmente una entidad se considera invariante bajo un conjunto de transformaciones si la imagen transformada de la entidad es indistinguible de la entidad original. La propiedad de ser

invariante se conoce como invarianza o invariancia.

MANOVA, El análisis multivariante de la varianza (MANOVA) es una técnica estadística que puede ser usada simultáneamente para explorar las relaciones entre diversas categorías de variables independientes (usualmente denominadas como tratamientos) y dos o más variables métricas dependientes. Como tal, representa una extensión del análisis univariante de la varianza (ANOVA). MANOVA es útil cuando el investigador diseña una situación experimental (manipulación de varias variables de tratamiento no métricas) para comprobar hipótesis concerniente a la varianza de respuestas de grupos sobre dos o más variables métricas dependientes.

Matriz Varianza-covarianza, La matriz **varianza–covarianza** es una **matriz cuadrada** de dimensión $n \times m$ que recoge las varianzas en la diagonal principal y las covarianzas en los elementos de fuera de la diagonal principal. Montanero (2008)

Potencia de la Prueba, es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando de hecho esta es falsa y deberá ser rechazada. Una manera en que podemos controlar la probabilidad de cometer un error del tipo II en un estudio, consiste en aumentar el tamaño de la muestra. La potencia de una prueba de hipótesis depende de tres aspectos: 1) si se aumenta el nivel de significación (α), también aumenta el valor de la potencia β , con un mayor riesgo de cometer “falsos positivos”. Por convención, α se suele fijar en

valores como 0.05 o 0.01. 2) el “tamaño del efecto”, si se mantiene fijo el nivel de significación y el tamaño de la muestra, a medida que aumenta el tamaño del efecto aumenta también la potencia del contraste. Es decir, que los efectos de gran tamaño son más fáciles de detectar que los pequeños, y 3) el tamaño de la muestra: si quedan fijos el nivel de significación y el tamaño del efecto, al aumentar el tamaño de la muestra aumenta también la potencia de la prueba. Esto es, con una muestra grande es más probable detectar diferencias significativas entre los grupos cuando realmente éstas existen. Peña (2002).

Simetría, para Hair et al. (2004) es:

Una Medida de la simetría de una distribución; en muchos casos la comparación se hace para una distribución normal. Una distribución simétrica positiva contiene pocos valores elevados y se inclina hacia la derecha, y una distribución simétrica negativa tiene pocos valores bajos y se inclina hacia la izquierda. Cuando los valores de simetría caen fuera del rango de -1 a +1 indican una distribución sustancialmente simétrica.

Técnica de Monte Carlo, según Illana (2013):

La técnica de Monte Carlo, también conocida como el método de Monte Carlo, es una técnica matemática que se utiliza para estimar los posibles resultados de un evento incierto. El método Monte Carlo fue inventado por John von Neumann y Stanislaw Ulam durante la Segunda Guerra Mundial para mejorar la toma de decisiones en

condiciones inciertas.

Desde su introducción, las simulaciones Monte Carlo han evaluado el impacto del riesgo en muchos escenarios de la vida real, los precios de acciones, la previsión de ventas o la gestión de proyectos. También proporcionan una serie de ventajas sobre los modelos predictivos con entradas fijas, como la capacidad de realizar análisis de sensibilidad o calcular la correlación de entradas. El análisis de sensibilidad permite a los tomadores de decisiones ver el impacto de las entradas individuales en un resultado específico y la correlación les permite comprender las relaciones entre cualquier variable de entrada.

La simulación Monte Carlo predice un conjunto de resultados basados en un rango estimado de valores frente a un conjunto de valores de entrada fijos. En otras palabras, una simulación Monte Carlo crea un modelo de posibles resultados al utilizar una distribución de probabilidades, como una distribución uniforme o normal, para cualquier variable que tenga una incertidumbre inherente. Luego, recalcula los resultados una y otra vez, cada vez mediante un conjunto diferente de números aleatorios entre los valores mínimo y máximo. En un experimento típico de Monte Carlo, este ejercicio se puede repetir miles de veces para producir una gran cantidad de resultados probables.

Independientemente de la herramienta que utilice, las técnicas de

Monte Carlo implican tres pasos básicos: a) Primero, se debe configurar el modelo predictivo, identificando tanto la variable dependiente que se va a predecir como las variables independientes (variables de entrada) que impulsarán la predicción. b) Segundo, especificar las distribuciones de probabilidades de las variables independientes. Se utiliza datos históricos y/o el juicio subjetivo del analista para definir un rango de valores probables y asigne ponderaciones de probabilidad para cada uno. y c) Finalmente, ejecutar simulaciones repetidamente, generando valores aleatorios de las variables independientes, hasta obtener suficientes resultados para formar una muestra representativa del número casi infinito de combinaciones posibles.

Puede ejecutar tantas simulaciones Monte Carlo como desee modificando los parámetros subyacentes que utiliza para simular los datos. También se puede calcular el rango de variación dentro de una muestra al calcular la varianza y la desviación estándar, que son medidas de dispersión de uso común. Normalmente, las variaciones más pequeñas se consideran mejores.

Valor crítico, según Hair et al (2004) es:

El Valor de un contraste estadístico (contraste t, contraste F) que denota un nivel de significación especificado. Por ejemplo, 1,96 denota un nivel de significación de 0,05 para el contraste t con tamaños muestrales grandes.

Variabilidad generalizada, “está definida por el determinante de la matriz variancia-covariancia”, Porras (2016).

III. METODOLOGÍA

El capítulo presenta los materiales y métodos utilizados en los procesos metodológicos para realizar la contrastación de la hipótesis y los aspectos técnicos empleados en la construcción de escenarios, simulación de datos, aplicación de las pruebas MVN, para medir el error tipo I de las distribuciones normales y la potencia de la prueba de las distribuciones t multivariada y distribución Cauchy multivariada, así como las técnicas aplicadas para clasificar los resultados de las pruebas de MVN obtenidos.

3.1 Métodos de la investigación

La presente investigación aplicó el método científico, hipotético-deductivo con enfoque cuantitativo. La presente investigación es de tipo básica, y orientada a la comprobación.

Es básica por que busca obtener nuevos conocimientos teóricos en la comparación de las pruebas para evaluar si se cumple el supuesto de distribución de normalidad multivariante; generando escenarios en base a tamaño de la muestra, número de variables que intervienen y la Variabilidad generalizada; y orientada a la comprobación, ya que permitirá comprobar en un amplio espectro de pruebas, el desempeño en detectar si un conjunto de datos sigue una distribución MVN.

3.2 Diseño de la investigación

El diseño de la presente investigación es no experimental ya que no se manipularán las variables. Hernández et al. (2018). Tuvo como objetivo clasificar el desempeño de 15 pruebas de MVN, en 30 escenarios contruidos a partir del tamaño de muestra, variables que intervienen y la variabilidad generalizada. Se generaron 100 repeticiones del conjunto de datos con distribución normal multivariante de cada escenario y se evaluó el desempeño del error tipo I; también se generaron 100 repeticiones del conjunto de datos con distribución t multivariada (con 10 grados de libertad) de cada escenario y se evaluó el desempeño de la potencia de la prueba; finalmente, se generaron 100 repeticiones del conjunto de datos con distribución Cauchy multivariada de cada escenario y se evaluó el desempeño de la potencia de la prueba.

Las 15 pruebas de MVN que se incluyen en la presente investigación fueron consideradas porque se tuvo acceso a los algoritmos de cálculo a través del lenguaje de programación R, Rstudio (ver 4.3.1) en su versión libre, el cual

permitió la generación de los conjuntos de datos aplicando la técnica de simulación de Monte Carlo; así mismo, permitió ejecutar los algoritmos de las 15 pruebas de MVN para evaluar su desempeño.

Una vez obtenido los resultados de las pruebas de error tipo I y la potencia de la prueba, se aplicó la técnica de Escalamiento Multidimensional, *Multidimensional Scaling Technique* (MDS) para clasificar las pruebas en términos de su desempeño (tasa de error tipo I y potencia de la prueba) en los escenarios considerados y determinar si la clasificación de las pruebas revelaba un desempeño similar o diferente.

Pruebas Estadísticas de la Normalidad Multivariante

Las 15 pruebas de MVN utilizadas en la presente investigación, se presenta en la tabla 1.

Tabla 1. Pruebas de MVN

BHEP	Prueba Estadística BHEP (Baringhaus -Henze -Epps -Pulley)
DEHT	Prueba estadística de Dorr-Ebner-Henze basada en la oscilación armónica
DEHU	Prueba estadística de Dorr-Ebner-Henze basada en la doble estimación de una característica PDE.
EHS	Prueba Estadística de Ebner-Henze-Strieder basada en una ecuación multivariante de Stein
HJG	Prueba estadística de Henze-Jimenez-Gamero
HV	Prueba Estadística de Henze-Visage

KKurt	Medida de Koziols de la curtosis multivariante de la muestra
MKurt	Medida de Mardia de la curtosis muestral multivariante
MRKurt	Prueba de Curtosis de Mori, Rohatgi y Szekely
MSkew	Prueba de Mardia para la asimetría multivariante de la muestra
PU	Prueba de Pudielko
ENER	Prueba de Energía
HZ	Prueba estadística de Henze Zirkler
ROY	Prueba de Royston
SW	Prueba generalizada de Shapiro Wilk (de Villasenor-Alva y Gonzalez-Estrada)

Prueba Estadística de BHEP ((Baringhaus-Henze-Epps-Pulley)

La siguiente función devuelve el valor de la Prueba estadística de Baringhaus -Henze -Epps -Pulley (BHEP):

$$BHEP_{n,\beta} = \frac{1}{n} \sum_{j,k=1}^n \exp\left(-\frac{\beta^2 \|Y_{n,j} - Y_{n,k}\|^2}{2}\right) - \frac{2}{(1 + \beta^2)^{d/2}} \sum_{j=1}^n \exp\left(-\frac{\beta^2 \|Y_{n,j}\|^2}{2(1 + \beta^2)}\right) + \frac{n}{(1 + 2\beta^2)^{d/2}}$$

Aquí, $Y_{n,j} = S_n^{-1/2} (X_j - \bar{X}_n)$, $J=1, \dots, n$, son los residuos escalados, \bar{X}_n es la media de la muestra y S_n es la matriz de covarianza de la muestra de los vectores aleatorios X_1, \dots, X_n . Para garantizar que el cálculo funcione correctamente se necesita $n \geq d + 1$.

Prueba estadística de DEH basada en la oscilación armónica (DEHT)

Basándose en una caracterización única de la distribución normal multivariada d-dimensional estándar como la única solución de un problema de valor inicial de una ecuación diferencial parcial por el operador armónico, Dörr, Ebner y Henze (2020) derivaron una nueva prueba para MVN. El estadístico de prueba viene dado por:

$$T_{n,a} = n \int_{\mathbb{R}^d} |\Delta\psi_n(t) - \Delta\psi(t)|^2 \omega_a(t) dt$$

$$= n \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \|y_j\|^2 \exp\{it^T y_j\} + (\|t\|^2 - d) \exp\left\{-\frac{\|t\|^2}{2}\right\} \right|^2 \omega_a(t) dt$$

Con $\omega_a(t) = \exp\{-a \|t\|^2\}$; $a > 0$, $t \in \mathbb{R}^d$, obtuvo la forma computacionalmente susceptible de la estadística como:

$$T_{n,a} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{d}{2}} \frac{1}{n} \sum_{j,k=1}^n \|y_j\|^2 \|y_k\|^2 \exp\left\{-(4a)^{-1} \|y_j - y_k\|^2\right\}$$

$$- \frac{2(2\pi)^{\frac{d}{2}}}{(2a+1)^{2+\frac{d}{2}}} \sum_{j=1}^n \|y_j\|^2 \left(\|y_j\|^2 + 2ad(2a+1)\right) \exp\left(\frac{\|y_j\|^2}{2(2a+1)}\right)$$

$$+ \frac{n\pi^{d/2}}{(a+1)^{2+d/2}} \left(ad^2(a+1) + \frac{d(d+2)}{4}\right)$$

La prueba invariante afín y consistente rechaza la H_0 de MVN para valores grandes de $T_{n,a}$.

Asimismo, Dörr et al. (2020) establecieron como teorema que la función característica de una distribución normal d-variable es la única solución de

la ecuación diferencial parcial, $\Delta f(\mathbf{t}) = (\|\mathbf{t}\|^2 - d)f(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$, sujeta a la condición $f(0) = 1$. Sobre la base de esta caracterización, Dörr et al. (2020) obtuvieron una estadística para evaluar MVN de conjuntos de datos. La estadística viene dada por:

$$U_{n,a} = n \int_{\mathbb{R}^d} |\Delta \psi_n(t) - (\|t\|^2 - d)\psi_n(t)|^2 \omega_a(t) dt$$

Declararon que los grandes valores de la estadística conducirán al rechazo de la hipótesis nula de MVN y dieron una integración directa para obtener una forma computacionalmente susceptible como:

$$U_{n,a} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{d}{2}} \frac{1}{n} \times \sum_{j,k=1}^n \exp\left\{\frac{\|y_j - y_k\|^2}{4a}\right\} \left[\|y_j\|^2 \|y_k\|^2 - (\|y_j\|^2 + \|y_k\|^2) \frac{1}{4a^2} (\|y_j - y_k\|^2 + 2ad(2a - 1)) + \frac{1}{16a^4} (16a^3 d^2 (a - 1) + 4a^2 d(d + 2) + \|y_j - y_k\|^4 + (8a^2 d - 4a(d + 2)) \|y_j - y_k\|^2) \right];$$

$$a > 0$$

Prueba estadística basada en la doble estimación de una característica PDE (DEHU)

Calcula la estadística de prueba del DEH basada en una doble estimación en la prueba PDE. Esta función evalúa la estadística de prueba con los datos dados y el parámetro de ajuste especificado **a**. Cada fila de la matriz de datos

contiene una de las muestras n (multivariantes) con dimensión d . Para garantizar que el cálculo funciona correctamente se necesita $n \geq d + 1$.

Prueba Estadística basada en una ecuación multivariante de Stein (EHS)

Esta función evalúa la estadística de prueba con los datos dados y el parámetro de ajuste especificado a . Cada fila de la matriz de datos contiene una de las n muestras (multivariadas) con dimensión d . Para garantizar que el cálculo funcione correctamente, se necesita $n \geq d + 1$.

$$T_{n,0} = \frac{d}{2} - 2^{\frac{d}{2}+1} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \|Y_{n,j}\|^2 \exp\left(-\frac{\|Y_{n,j}\|^2}{2}\right).$$

Se debe tener en cuenta que $a=\text{Inf}$ devuelve la estadística de prueba limitante con el valor $2 * \text{MSkew} + \text{MRSSkew}$ y $a=0$ devuelve el valor de la estadística de límite

Prueba estadística de Henze-Jiménez-Gamero (HJG)

Aparte de las estadísticas originales de BHEP que emplean las funciones características empíricas y teóricas, se obtuvo una prueba de normalidad univariada reemplazando las funciones características en Epps y Polea (1983) con sus correspondientes funciones generadoras de momentos. Henze y Jiménez-Gamero (2019) extendieron la estadística al caso multivariante d -dimensional. Obtuvieron la estadística como:

$$T_{n,\beta} = n \int_{R^d} (M_n(t) - m(t))^2 \omega_\beta(t) dt$$

Donde $M_n(t); t \in R^d$ es la función empírica generadora de momentos de vectores escalados de observaciones, $y_j; j = 1, 2, \dots, n$, definida por $M_n(t) = n^{-1} \sum_{j=1}^n \exp(t^T y_j)$, $m(t) = \exp(1/2 t^T t)$ y $\omega_\beta(t) = \exp(-\beta \|t\|^2)$; $\beta > 1$. La integral directa da la forma computacional de las estadísticas como:

$$T_{n,\beta} = \pi^{d/2} \left(\frac{1}{n} \sum_{j,k=1}^n \beta^{-d/2} \exp\left\{ \frac{\|y_j + y_k\|^2}{4\beta} \right\} + \frac{n}{(\beta - 1)^{d/2}} - 2 \sum_{j=1}^n (\beta - 1/2)^{-d/2} \exp\left\{ \frac{\|y_j\|^2}{4\beta - 2} \right\} \right);$$

$$\beta > 1$$

El estadístico afín invariante y consistente rechaza la distribución nula de MVN para valores grandes de la $T_{n,\beta}$

Prueba Estadística de Henze-Visagie (HV)

Henze y Visagie (2020) obtuvieron la solución única de la ecuación diferencial parcial de un vector aleatorio d-dimensional, \mathbf{X} , sea $m(t) = \exp\left\{ \frac{\|t\|^2}{2} \right\}; t \in R^d$

la cual es la función generadora de momento de la distribución normal multivariante estándar d-dimensional. Sobre la base de esta propiedad única, obtuvieron una estadística para evaluar MVN de conjuntos de datos con una estadística dada por:

$$T_{n,\gamma} = n \int_{R^d} \|M'_n(t) - tM_n(t)\|^2 \omega_\gamma(t) dt$$

donde $\omega_\gamma(\mathbf{t}) = \exp\{-\gamma\|\mathbf{t}\|^2\}$ es la función ponderada y $M_n(\mathbf{t}) = n^{-1} \sum_{j=1}^n \exp\{t^T y_j\}$ es la función generadora de momento empírico de los vectores escalados de observaciones. Afirmaron que el rechazo de la hipótesis nula es para valores grandes de la estadística. Poniendo $\mathbf{y}_{j,k}^\pm = \mathbf{y}_j \pm \mathbf{y}_k$, obtuvieron la forma computacional de la estadística como:

$$T_{n,\gamma} = \frac{1}{n} \left(\frac{\pi}{\gamma}\right)^{d/2} \sum_{j,k=1}^n \exp\left(\frac{\|\mathbf{y}_{j,k}^+\|^2}{4\gamma}\right) \left(y_j^T y_k - \frac{\|\mathbf{y}_{j,k}^+\|^2}{2\gamma} + \frac{d}{2\gamma} + \frac{\|\mathbf{y}_{j,k}^+\|^2}{4\gamma^2}\right);$$

$$\gamma > 0$$

Medida de Koziols de la curtosis multivariante de la muestra (KKurt)

Esta función calcula la medida invariante de la curtosis de muestra multivariante debida a Koziol (1989).

La curtosis de muestra multivariante se define como:

$$\tilde{b}_{n,d}^{(2)} = \frac{1}{n^2} \sum_{j,k=1}^n (Y_{n,j}^T Y_{n,k})^4,$$

Donde, $Y_{n,j} = S_n^{-1/2} (X_j - \bar{X}_n)$ son los residuos escalados, \bar{X}_n es la media muestral y S_n es la matriz de covarianza muestral de los vectores aleatorios X_1, \dots, X_n . Para garantizar que el cálculo funciona correctamente se necesita $n \geq d + 1$. Si ese no es el caso, la función devuelve un error. Nótese

que para $d = 1$, tenemos una medida proporcional a la curtosis de la muestra al cuadrado.

Medida de Mardia de la curtosis muestral multivariante (MKurt)

Esta función calcula la medida invariante clásica de la curtosis de muestra multivariante debida a Mardia (1970).

La curtosis muestral multivariante debida a Mardia (1970) se define por:

$$b_{n,d}^{(2)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \|Y_{n,j}\|^4,$$

donde $Y_{n,j} = S_n^{-1/2} (X_j - \bar{X}_n)$, \bar{X}_n es la media muestral y S_n es la matriz de covarianza muestral de los vectores aleatorios X_1, \dots, X_n . Para asegurar que el cálculo funciona correctamente $n \geq d + 1$ es necesario.

Prueba de Curtosis de Móri, Rohatgi y Székely (MRKurt)

Esta función calcula la medida invariante de la asimetría de la muestra multivariante debida a Móri, Rohatgi y Székely (1993).

La asimetría multivariante de la muestra se define como:

$$\tilde{b}_{n,d}^{(1)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \|Y_{n,j}\|^2 \|Y_{n,k}\|^2 Y_{n,j}^\top Y_{n,k},$$

donde $Y_{n,j} = S_n^{-1/2} (X_j - \bar{X}_n)$, \bar{X}_n es la media muestral y S_n es la matriz de covarianza muestral de los vectores aleatorios X_1, \dots, X_n . Para garantizar que el cálculo funciona correctamente se necesita $n \geq d + 1$. Si ese no es el caso, la función devuelve un error. Nótese que para $d = 1$, es equivalente a

la asimetría en el sentido de Mardia.

Prueba de Mardia para la asimetría multivariante de la muestra (MSkew)

Esta función calcula la medida invariante clásica de la asimetría de la muestra multivariante debida a Mardia (1970).

La asimetría de la muestra multivariante debida a Mardia (1970) se define por:

$$b_{n,d}^{(1)} = \frac{1}{n^2} \sum_{j,k=1}^n (Y_{n,j}^T Y_{n,k})^3,$$

donde $Y_{n,j} = S_n^{-1/2} (X_j - \bar{X}_n)$, \bar{X}_n es la media muestral y S_n es la matriz de covarianza muestral de los vectores aleatorios X_1, \dots, X_n . Para garantizar que el cálculo funciona correctamente se necesita $n \geq d + 1$. Si ese no es el caso, la función devuelve un error. Nótese que para $d = 1$, tenemos una medida proporcional a la asimetría de la muestra al cuadrado

Prueba de Pudelko (PU)

Sea X_1, X_2, \dots una secuencia de vectores aleatorios d -dimensionales, independientes, distribuidos de manera idéntica con distribución P y función característica $C(t)$. Para S_n denotamos la matriz empírica de covarianza

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_n)(X_j - \bar{X}_n)^T,$$

donde \bar{X}_n representa la media de la muestra, $\bar{X} = n^{-1} \sum_{j=1}^n X_j$. Sea $S_n^{-1/2}$ denota una raíz cuadrada definida simétrica y positiva de S_n^{-1} y define los residuos escalados por $Y_j = S_n^{-1/2} (X_j - \bar{X}_n)$. Para $\tilde{C}_n(t)$

denotamos la función característica empírica de los residuos escalados, es decir,

$$\tilde{C}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \exp(i\langle t, Y_j \rangle) = \exp(-i\langle S_n^{-\frac{1}{2}}t, \bar{X}_n \rangle) C_n(S_n^{-\frac{1}{2}}t),$$

donde $C_n(t)$ es la función característica empírica de la muestra X_1, \dots, X_n , es decir,

$$C_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \exp(i\langle t, X_j \rangle)$$

y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interior en \mathbb{R}^d

Para probar una hipótesis de que la muestra proviene de una distribución normal d-dimensional no degenerada ($P \in \mathcal{N}_d$) consideramos la siguiente estadística:

$$T_n = T_n(X_1, \dots, X_n) = \sqrt{n} \sup_{|t| < r} |W_n(t)|$$

Donde, $W_n(t)$ es igual a:

$$\frac{\tilde{C}_n(t) - \exp(-\frac{|t|^2}{2})}{|t|}, t \neq 0,$$

y es igual a 0 cuando $t = 0$; y $|\cdot|$ denota la norma euclidiana en \mathbb{R}^d .

Tenga en cuenta que la estadística de prueba se define sólo si S_n no es singular. Pero, si P es la distribución normal d-dimensional no degenerada, entonces S_n ; es no singular con probabilidad uno.

Prueba de Energía (ENER)

Para aplicar la prueba de energía en un conjunto de datos de normalidad

multivariante, primero la muestra se estandariza mediante una transformación lineal. Para $Z \in \mathbb{R}^d$ normal multivariante estándar con vector medio 0 y matriz de covarianza identidad,

$$E|Z - Z'|_d = \sqrt{2}E|Z|_d = 2 \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})}$$

Si y_1, \dots, y_n denota los elementos de muestra estandarizados, la fórmula de cálculo para el estadístico de prueba de normalidad d-variado esta dado por:

$$n\mathcal{E}_{n,d} = n \left(\frac{2}{n} \sum_{j=1}^n E|y_j - Z|_d - 2 \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})} - \frac{1}{n^2} \sum_{j,k=1}^n |y_j - y_k|_d \right)$$

Donde:

$$E|a - Z|_d = \frac{\sqrt{2}\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! 2^k} \frac{|a|_d^{2k+2}}{(2k+1)(2k+2)} \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})\Gamma(k+\frac{3}{2})}{\Gamma(k+\frac{d}{2}+1)}$$

La expresión para $E|a-Z|_d$ se deriva del hecho de que si Z es un vector aleatorio normal estándar d-variado, $|a-Z|_d^2$ tiene una distribución chi-cuadrada no central $\chi^2 [v; \lambda]$ con grados de libertad $v = d + 2\psi$, y parámetro de no centralidad $\lambda = |a|_d^2 / 2$, donde ψ es una variable aleatoria de Poisson con media λ . Típicamente la suma en $E|a-Z|_d$ converge después de 40-60 términos, pero puede requerir más términos si $|a|_d$ es grande; sin embargo, cuando $|a|_d$ es grande, se puede aplicar el límite $E|a-Z|_d \cong |a|_d$.

Si no se especifican la media vectorial μ y la matriz de covarianza Σ , la prueba se modifica transformando la muestra observada utilizando el vector medio de la muestra y la matriz de covarianza de la muestra.

Esta prueba de normalidad multivariante es práctica para aplicar dimensiones arbitrarias y tamaño de muestra ($d > n$ no es un problema). Las comparaciones de potencia de Monte Carlo sugieren que es un poderoso competidor de otras pruebas invariantes afines de normalidad multivariante.

En general, la prueba de energía es una poderosa prueba ómnibus de normalidad multivariante, consistente con todas las alternativas con una potencia relativamente buena en comparación con otras.

Prueba Estadística de Henze-Zirkler (HZ)

La prueba de Henze-Zirkler está basada en la distancia funcional no negativa, la cual mide la distancia entre dos funciones de distribución. Si los datos presentan una distribución normal multivariada, la prueba estadística se distribuye aproximadamente como una lognormal. Primero, se calcula la media, varianza y el parámetro de suavización. Entonces, la media y la varianza son lognormalizados y el p valor es estimado. La prueba estadística de normalidad multivariada de Henze-Zirkler es:

$$HZ = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n e^{-\frac{\beta^2 D_{ij}}{2}} - 2(1 + \beta^2)^{-p/2} \sum_{i=1}^n e^{-\frac{\beta^2}{2(1+\beta^2)} D_i} + n(1 + 2\beta^2)^{-p/2}$$

Donde:

p: Número de variables.

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{n(2p+1)}{4} \right)^{1/(p+4)}$$

$$D_{ij} = (x_i - x_j)' S^{-1} (x_i - x_j)$$

$$D_i = (x_i - \bar{x})' S^{-1} (x_i - \bar{x}) = m_{ii}$$

En la expresión 2, D_i es la distancia al cuadrado de Mahalanobis de la i -ésima observación al centroide y D_{ij} es la distancia de Mahalanobis entre la i -ésima y j -ésima observación. Si los datos son normales multivariados el estadístico HZ es aproximadamente lognormal con media μ y varianza σ^2 dado por:

$$\mu = 1 - \frac{a^{-p/2} (1 + p\beta^{2/a} + (p+2)\beta^4)}{2a^2}$$

$$\sigma^2 = 2(1 + 4\beta^2)^{-\frac{p}{2}} + \frac{2a^{-p}(1+2p\beta^4)}{a^2} + \frac{3p(p+2)\beta^8}{4a^4} - 4\bar{w}_p^{-p/2} \left(1 + \frac{3p\beta^4}{2\bar{w}_\beta} + \frac{p(p+2)\beta^8}{2\bar{w}_\beta^2} \right)$$

Donde:

$a = 1 + 2\beta^2$ y $\bar{w}_\beta = (1 + \beta^2) (1 + 3\beta^2)$. La media y varianza log normalizada del estadístico HZ puede ser definido de la siguiente manera:

$$\log(\mu) = \log \left(\sqrt{\frac{\mu^4}{\sigma^2 + \mu^2}} \right) \text{ y } \log(\sigma^2) = \log \left(\sqrt{\frac{\sigma^2 + \mu^2}{\sigma^2}} \right)$$

Usando la distribución lognormal con parámetros μ y σ , se puede probar la significancia de la normalidad multivariada. La prueba de Wald para la normalidad multivariada es dada por:

$$z = \frac{\log(HZ) - \log(\mu)}{\log(\sigma)}$$

Prueba de Royston (ROY)

La prueba de Royston usa la estadística Shapiro-Wilk / Shapiro-Francia para probar la normalidad multivariada. Si la curtosis es mayor a 3, entonces se usa la prueba de Shapiro-Francia para distribuciones leptocúrticas. Mientras que se usa la prueba de Shapiro-Wilk para distribuciones platicúrticas.

Si W_j es la prueba estadística de Shapiro-Wilk/Shapiro – Francia para la j -ésima variable ($j=1,2,\dots,p$) y Z_j son los valores obtenidos de la transformación para normalidad, entonces:

Si $4 \leq n \leq 11$; $x = n$ y $\varpi_j = -\log [\gamma - \log(1-W_j)]$

Si $12 \leq n \leq 2000$; $x = \log(n)$ y $\varpi_j = \log(1-W_j)$

Como se ha visto, x y ϖ_j cambian debido al tamaño de la muestra n . Usando ecuación 5 transforma los valores de cada variable aleatorio, obteniéndose la siguiente ecuación:

$$z = \frac{w_j - \mu}{\sigma}$$

Donde γ , μ y σ son derivados de la siguiente aproximación polinomial:

$$\gamma = a_{0\gamma} + a_{1\gamma}x + a_{2\gamma}x^2 + \dots + a_{d\gamma}x^d$$

$$\mu = a_{0\mu} + a_{1\mu}x + a_{2\mu}x^2 + \dots + a_{d\mu}x^d$$

$$\log(\sigma) = a_{0\sigma} + a_{1\sigma}x + a_{2\sigma}x^2 + \dots + a_{d\sigma}x^d$$

La prueba estadística de Royston para normalidad univariada es dada por:

$$H = \frac{e \sum_{j=1}^p \Psi_j}{p} \sim \chi_e^2$$

Donde e es el equivalente grados de libertad y $\Phi(\cdot)$ es la función de distribución acumulada de la distribución normal estándar tal que:

$$e = p/[1 + (p - 1)c]$$

$$\psi_j = \{\Phi^{-1}[\Phi(-Z_j)/2]\}^2 \quad j=1,2, \dots, P$$

Como se puede apreciar en la última expresión, el término c debe ser obtenido para calcular la significancia de la prueba estadística de Royston.

El término c debe ser calculado de la siguiente manera:

$$\bar{c} = \sum_i \sum_j \frac{c_{ij}}{p(p-1)} \quad \{c_{ij}\}_{i \neq j}$$

Donde:

$$c_{ij} = \begin{cases} g(r_{ij}, n) & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Con los límites de $g(\cdot)$ como $g(0, n) = 0$ y $g(1, n) = 1$. La función $g(\cdot)$ es definida de la siguiente manera:

$$g(r, n) = r^\lambda \left[1 - \frac{\mu}{\nu} (1 - r)^\mu \right]$$

Los parámetros desconocidos, μ , λ y ν son estimados mediante simulación.

Prueba Generalizada de Shapiro Wilk (de Villasenor-Alva y González-Estrada) (SW)

Si se asume que X_1, \dots, X_n son vectores aleatorios idénticamente distribuidos

en \mathbb{R}^p , $p \geq 1$. Si $N^P(\mu, \Sigma)$ denota la densidad de una normal p-variada con vector de media μ y matriz de covarianza Σ . Sea $\mathbf{0}$ el vector nulo de orden p y sea \mathbf{I} la matriz identidad del orden $p \times p$.

Para probar si la hipótesis nula $H_0: X_1, \dots, X_n$ es una muestra de $N^P(\mu, \Sigma)$ donde μ y Σ son desconocidos, se propone la siguiente prueba estadística:

$$W^* = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p W_{Z_i}$$

Donde W_{Z_i} es el estadístico Shapiro-Wilk evaluado en la i-ésima coordenada de la observación transformada Z_{i1}, \dots, Z_{in} $i=1, \dots, p$.

La prueba basada en W^* rechaza H_0 en una prueba de tamaño α si $W^* < c_{\alpha;n,p}$ donde $c_{\alpha;n,p}$ satisface la ecuación:

$$\alpha = P \{ W^* < c_{\alpha;n,p} / H_0 \text{ es verdadero} \}$$

3.3 Población y muestra

La población estuvo constituida por las 15 pruebas de MVN identificadas y presentadas. Cada prueba de MVN se constituye en una unidad de análisis, de las cuales se obtuvieron los resultados al aplicar la prueba a cada uno de los 30 escenarios, definidos a partir de las combinaciones de tamaño de muestra, número de variables que intervienen y la variabilidad generalizada.

Cada escenario fue simulado 100 veces, obteniéndose un total de 45,000 conjuntos de datos con distribución MVN, es decir:

(# de pruebas) x (# de escenarios) x (# de simulaciones)

(15) x (30) x (100) = 45,000 conjuntos de datos, para la prueba MVN y

medición de error tipo I.

Con la finalidad de medir la potencia de la prueba se generaron otros 45,000 conjuntos de datos con distribución t multivariada y 45,000 conjuntos de datos con distribución Cauchy multivariada.

3.4. Variables de estudio

3.4.1 Definición conceptual

Desempeño de una Prueba estadística de MVN, esta referido a la capacidad que una prueba detecte la mayor cantidad de conjuntos de datos, que cumplen el supuesto de la distribución MVN, cuando realmente esté presente dicho supuesto, en diferentes condiciones de tamaño de muestra, número de variables que intervienen y la variabilidad generalizada de los datos.

Distribución de datos que presentan MVN, es el conjunto de datos cuya distribución de datos es la normal multivariante.

Distribución de datos que no presentan MVN, es el conjunto de datos cuya distribución de datos no es la normal multivariante.

Clasificación de pruebas MVN, es la agrupación de las pruebas MVN según su similaridad o diferencias entre estas.

3.4.2 Definición operacional

Desempeño de una Prueba estadística de MVN, es el porcentaje

de distribuciones de MVN que no cumplen con el supuesto de normalidad.

Distribución de datos que presentan MVN, es el número de distribuciones de datos, cuyo estadístico de prueba es mayor que la probabilidad del p-valor ($p\text{-valor} > 0.05$).

Distribución de datos que no presentan MVN, es el número de distribuciones de datos, cuyo estadístico de prueba es menor o igual que la probabilidad del p-valor ($p\text{-valor} \leq 0.05$).

Clasificación de las pruebas de MVN, son las pruebas que cuentan con similitud.

3.4.3 Indicadores

Los indicadores se presentan en el siguiente cuadro de operacionalización de variables.

Variables	Indicadores	Valores finales	Tipo de variable
Desempeño de una Prueba estadística de MVN	Porcentaje	(0 – 100)%	Numérica Discreta
Distribución de datos que presentan MVN.	p-valor	$p > 0.05$	Numérica Discreta
Distribución de datos no presentan MVN.	p-valor	$p \leq 0.05$	Numérica Discreta
Clasificación de las pruebas de MVN	Grupo	Si/No	Cualitativa

3.5 Técnicas e instrumentos de recolección de datos

Los datos utilizados fueron simulados con el método Monte Carlo, con una media correspondiente de cada variable y la matriz variancia-covariancia y el tamaño de muestra correspondiente a cada escenario. Los resultados del proceso de simulación fueron almacenados en una Base de Datos, para realizar los análisis respectivos.

a) Construcción de Escenarios.

Se construyeron escenarios, con características relacionadas al tamaño de la muestra, número de variables que intervienen y la variabilidad generalizada. Para evaluar el desempeño de las pruebas que evalúan el supuesto de normalidad MVN de una distribución de datos, los diferentes escenarios tendrán las características que se presentan en la tabla 2.

Las combinaciones de las características consideradas, permitió la construcción de 30 escenarios, los cuales se presentan en las tablas 3 y 4. El tamaño de la muestra, en cada escenario, se determinó en función del número de “p” variables, con lo cual se obtuvo como mínimo $p \cdot (p+3)/2$ datos, tal como se muestra en la tabla 2.

Tabla 2

Características a considerar para la construcción de escenarios de distribución de datos MVN

Tamaño de la muestra (n)	Número de variables (p)	Variabilidad Generalizada (v)
15	4	1
25	5	100
30	6	
35	7	
45	8	

Tabla 3

Escenarios del 1 al 15

Escenarios	p	n	v
E ₀₁	4	15	1
E ₀₂	4	25	1
E ₀₃	4	30	1
E ₀₄	4	35	1
E ₀₅	4	45	1
E ₀₆	5	25	1
E ₀₇	5	30	1
E ₀₈	5	35	1
E ₀₉	5	45	1
E ₁₀	6	30	1
E ₁₁	6	35	1
E ₁₂	6	45	1
E ₁₃	7	35	1
E ₁₄	7	45	1
E ₁₅	8	45	1

Tabla 4

Escenarios del 16 al 30

Escenarios	p	n	v
E ₁₆	4	15	100
E ₁₇	4	25	100
E ₁₈	4	30	100
E ₁₉	4	35	100
E ₂₀	4	45	100
E ₂₁	5	25	100
E ₂₂	5	30	100
E ₂₃	5	35	100
E ₂₄	5	45	100
E ₂₅	6	30	100
E ₂₆	6	35	100
E ₂₇	6	45	100
E ₂₈	7	35	100
E ₂₉	7	45	100
E ₃₀	8	45	100

b) Simulación de Escenarios y aplicación de Pruebas.

Se simularon 100 conjuntos de datos de cada escenario, a los cuales se les aplicó cada una de las pruebas estadísticas mostradas en la Tabla 1 (p_i , para $i = 1, \dots, 15$), para evaluar la MVN; los resultados fueron registrados en una base de datos.

c) Organización de resultados.

Se diseñó una Base de datos con los resultados de cada prueba en cada escenario, con la siguiente estructura:

Código de la Prueba

Número de conjunto de datos

Escenario

Dimensiones (número de variables)

Tamaño de la muestra

Variabilidad generalizada

Estadístico de la prueba

MVN?

- d) **Aplicación de técnica de *Multidimensional Scaling* (MDS).** Los resultados que se obtuvieron en c) se usaron para aplicar la técnica de clasificación de las pruebas según el desempeño y obtener una clasificación de las pruebas según los resultados obtenidos en detectar si los datos siguen una distribución MVN.

3.6 Técnicas de análisis de los resultados

Se aplicó la Técnica de Escalamiento Multidimensional, *MultiDimensional Scaling Technique* (MDS) con el objetivo de clasificar dichas pruebas en términos de su desempeño (tasa de error Tipo I y potencia de prueba) en las condiciones de los escenarios considerados. De esta manera, se determinó el desempeño obtenido de cada prueba en cada escenario.

El Escalamiento Multidimensional es una técnica exploratoria utilizada para visualizar proximidades (una proximidad es un número que indica cuán similares o cuán diferentes son dos objetos o variables) en un espacio de baja dimensión. El MDS permitirá descubrir las relaciones entre las variables.

Cada objeto está representado por un punto en un espacio multidimensional. Dos objetos similares están representados por dos puntos que están cerca el uno del otro, mientras que dos objetos diferentes están representados por dos puntos que están separados entre sí.

El MDS es una técnica multivariante de interdependencia que trata de representar en un espacio geométrico de pocas dimensiones las proximidades existentes entre un conjunto de objetos. Esta técnica, aunque tiene sus raíces a principios del siglo XX, hoy día sigue siendo infrutilizada en muchas áreas. El MDS, tiene sus orígenes en el campo de la Psicología. Surge cuando se pretendía estudiar la relación que existía entre la intensidad física de ciertos estímulos con su intensidad subjetiva.

Existen dos modelos básicos de MDS que son: el modelo de escalamiento métrico y el modelo de escalamiento no métrico. En el primero de ellos se considera que los datos están medidos en escala de razón o en escala de intervalo y en el segundo se considera que los datos están medidos en escala ordinal. En la presente investigación se ha utilizado el modelo de escalamiento métrico.

Modelo de escalamiento métrico

Todo modelo de escalamiento parte de la idea de que las distancias son una función de las proximidades, es decir, $d_{ij} = f(\delta_{ij})$. En el modelo de escalamiento métrico se parte del supuesto de que la relación entre las proximidades y las distancias es de tipo lineal: $d_{ij} = a + b\delta_{ij}$. El primer

procedimiento de escalamiento métrico fue formulado por Torgerson en 1958, quién se basó en un teorema de Young y Householder, según el cual, a partir de una matriz de distancias, $D \in M_{n \times n}$, se puede obtener una matriz $B \in M_{n \times n}$ de productos escalares entre vectores. El procedimiento consiste en transformar la matriz de proximidades $\Delta \in M_{n \times n}$ en una matriz de distancias $D \in M_{n \times n}$, de tal forma que verifique los tres axiomas de la distancia euclídea:

No negatividad	$d_{ij} \geq 0 = d_{ii}$
Simetría	$d_{ij} = d_{ji}$
Desigualdad triangular	$d_{ij} \leq d_{ik} + d_{kj}$

Una vez obtenida la matriz $D \in M_{n \times n}$ es necesario transformarla en una matriz $B \in M_{n \times n}$ de productos escalares entre vectores mediante la siguiente transformación:

$$b_{ij} = -\frac{1}{2}(d_{ij}^2 - d_{i.}^2 - d_{.j}^2 + d_{..}^2) \quad \text{donde:}$$

$$d_{i.}^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n d_{ij}^2 \quad (\text{distancia cuadrática media por fila})$$

$$d_{.j}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_{ij}^2 \quad (\text{distancia cuadrática media por columna})$$

$$d_{..}^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij}^2 \quad (\text{distancia cuadrática media de la matriz})$$

Obtenidas dichas transformaciones, lo único que queda es transformar la matriz $B \in M_{n \times n}$ en una matriz $X \in M_{n \times m}$ tal que $B = X \cdot X'$, siendo X la matriz que nos da las coordenadas de cada uno de los n estímulos en cada una de las m dimensiones. Cualquier método de factorización permite transformar B en $X \cdot X'$.

Para conocer acerca de la bondad del modelo, es necesario conocer dos coeficientes, los cuales están dados por el *Stress* y el coeficiente de correlación al cuadrado.

Se sabe que las distancias son una función de las proximidades, es decir:

$$f: \delta_{ij}(x) \rightarrow d_{ij}(x)$$

de esta forma se tiene que $d_{ij} = f(\delta_{ij})$. Esto no deja ningún margen de error, sin embargo, en las proximidades empíricas es difícil que se dé la igualdad, con lo que generalmente ocurre que $d_{ij} \approx f(\delta_{ij})$. A las transformaciones de las proximidades por f se denomina disparidades. A partir de aquí se define el error cuadrático como:

$$e_{ij}^2 = (f(\delta_{ij}) - d_{ij})^2$$

Como medida que nos permita conocer acerca de la bondad del modelo se puede utilizar el *stress* que Kruskal definió como:

$$Stress = \sqrt{\frac{\sum_{i,j} (f(\delta_{ij}) - d_{ij})^2}{\sum_{i,j} d_{ij}^2}}$$

Mientras mayor sea la diferencia entre las disparidades y las distancias, es decir, entre $f(\delta_{ij})$ y d_{ij} mayor será el *stress* y por tanto peor será el modelo.

Por tanto, el *stress* no es propiamente una medida de la bondad de ajuste, sino una medida de la no bondad o “maldad” del ajuste. Su valor mínimo es

0, mientras que su límite superior para n estímulos es $\sqrt{1 - \frac{2}{n}}$

Se sugiere usar la tabla de Kruskal para conocer las interpretaciones de los valores del *stress*:

Pobre	0.2
Aceptable	0.1
Bueno	0.05
Muy aceptable	0.025
Excelente	0.0

La otra medida o indicador a utilizar es el coeficiente de correlación al cuadrado (RSQ), que informa de la proporción de variabilidad de los datos de partida que es explicada por el modelo. Los valores que puede tomar oscilan entre 0 y 1, al ser un coeficiente de correlación al cuadrado. Valores cercanos a 1 indican que el modelo es bueno y valores cercanos a 0 indican que el modelo es malo. Matemáticamente se expresa de la siguiente manera:

$$RSQ = \frac{[\sum_i \sum_j d_{ij} - d_{..}] (f(d_{ij}) - f(d_{..}))^2}{[\sum_i \sum_j (d_{ij} - d_{..})^2] [\sum_i \sum_j (f(d_{ij}) - f(d_{..}))^2]}$$

Los programas estadísticos más difundidos cuentan con los algoritmos para obtener soluciones con MDS, así como las medidas para determinar si el modelo es adecuado o no. En la actualidad todos los algoritmos implementados en los programas estadísticos son reiterativos, de forma que se alcance la mejor solución posible.

En la presente investigación, cuando se ha aplicado el MDS, se ha utilizado el Programa SPSS (Ver 27.0), en este programa, los procedimientos de MDS, se encuentran en el subprograma ALSCAL (*Alternating Least Squares*

SCALing), desarrollado por Takane, Young y De Leew en 1977, basándose en el algoritmo de mínimos cuadrados alternantes.

IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1 Resultados

Para cada escenario generado, se simularon 100 repeticiones de las distribuciones de datos de la normal multivariante, para analizar la tasa de error tipo I y para analizar la potencia de la prueba, se utilizó la distribución t multivariante con 10 grados de libertad, teniendo en cuenta su comportamiento moderado respecto a la simetría y a la curtosis. y la distribución Cauchy multivariante, debido a su comportamiento más marcado respecto a la simetría y la curtosis. A dichos escenarios simulados se le aplicaron las 15 pruebas MVN y los resultados se presentan y analizan en las siguientes tablas.

Las tablas 5, 6 y 7, presentan los porcentajes de los 100 conjuntos de datos

simulados, con variabilidad generalizada igual a 1, donde la hipótesis nula de normalidad multivariada fue rechazada en el nivel $\alpha = 0,05$. En las tablas 8, 9 y 10, se presentan los porcentajes de los 100 conjuntos de datos simulados, con variabilidad generalizada igual a 100.

4.1.1 Análisis de la Distribución Normal Multivariada

En la Tabla 5 se presenta la tasa de error tipo I obtenida luego de aplicar las pruebas en los 5 primeros escenarios, cuando $p=4$, en este caso, una tasa de rechazo por encima del nivel del 5% evidencia un problema con la tasa de error de Tipo I, se puede observar que esto sucede con la prueba PU (Pudelko) en la cual se obtiene entre 60 y 77 por ciento de rechazo.

La Tabla 5 también muestra que las estimaciones de error tipo I de las demás pruebas se encuentran muy cerca del nivel alfa nominal (0,05). En general, las tasas de error tipo I de estas pruebas variaron de 0 a 10% independientemente del tamaño de la muestra (n), cuando el número de variables $p = 4$ y variabilidad generalizada $v = 1$.

En la Tabla 6, para el caso cuando $p=5$ y $p=6$, independientemente del tamaño de la muestra, el desempeño de las pruebas para la distribución normal multivariada varía de 1 a 14%, tal como se aprecia La prueba PU (Pudelko) se mantiene con una alta tasa de rechazos que fluctúan entre 51 y 72%. La prueba de Royston, tuvo un rechazo que varía de 8 a 14%.

Tabla 5

Tasas de error tipo I en distribuciones de datos normal multivariada, con variabilidad generalizada = 1 (Escenarios del 1 al 5)

Pruebas MVN	ESCENARIOS				
	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
	p = 4 n =15	p = 4 n =25	p = 4 n =30	p = 4 n = 35	p = 4 n =45
BHEP	2.0	7.0	2.0	7.0	6.0
DEHT	3.0	4.0	4.0	6.0	9.0
DEHU	2.0	7.0	1.0	6.0	5.0
EHS	3.0	9.0	4.0	8.0	5.0
HJG	0.0	4.0	5.0	8.0	7.0
HV	0.0	4.0	6.0	7.0	5.0
Kkurt	3.0	2.0	4.0	8.0	6.0
MKurt	3.0	3.0	2.0	6.0	8.0
MRSSkew	5.0	5.0	5.0	7.0	7.0
Mskew	3.0	5.0	4.0	5.0	7.0
PU	68.0	69.0	60.0	77.0	71.0
Energía	3.0	7.0	2.0	6.0	7.0
HZ	0.0	7.0	2.0	4.0	5.0
Royston	5.0	9.0	2.0	4.0	7.0
SW	5.0	5.0	5.0	3.0	10.0

En la tabla 7, en los escenarios cuando $p=6$ y $p=7$, independientemente del tamaño de la muestra, el desempeño de las pruebas para la distribución normal multivariada varía de 2 a 13%. La prueba PU (Pudelko) se mantiene con una alta tasa de rechazos que fluctúan entre 59 y 65%. La prueba de Royston, tuvo un rechazo que varía de 5 a 13%.

Tabla 6

Tasas de error tipo I en distribuciones de datos normal multivariada, con variabilidad generalizada = 1 (Escenarios del 6 al 10)

Pruebas MVN	ESCENARIOS				
	E_6	E_7	E_8	E_9	E_10
	p = 5 n =25	p = 5 n =30	p = 5 n = 35	p = 5 n =45	p = 6 n =30
BHEP	2.0	4.0	4.0	6.0	7.0
DEHT	6.0	7.0	7.0	5.0	2.0
DEHU	6.0	6.0	7.0	5.0	3.0
EHS	3.0	5.0	6.0	8.0	6.0
HJG	6.0	5.0	8.0	3.0	1.0
HV	6.0	5.0	9.0	3.0	2.0
Kkurt	6.0	6.0	10.0	3.0	3.0
MKurt	5.0	4.0	6.0	4.0	3.0
MRSSkew	3.0	7.0	9.0	5.0	2.0
Mskew	4.0	6.0	5.0	5.0	3.0
PU	65.0	51.0	72.0	66.0	66.0
Energía	3.0	4.0	4.0	7.0	4.0
HZ	2.0	2.0	3.0	5.0	9.0
Royston	11.0	13.0	8.0	14.0	11.0
SW	4.0	4.0	4.0	6.0	6.0

Tabla 7

Tasas de error tipo I en distribuciones de datos normal multivariada, con variabilidad generalizada = 1 (Escenarios del 11 al 15)

Pruebas MVN	ESCENARIOS				
	E_11	E_12	E_13	E_14	E_15
	p = 6 n = 35	p = 6 n = 45	p = 7 n = 35	p = 7 n = 45	p = 8 n = 45
BHEP	8.0	8.0	5.0	4.0	8.0
DEHT	6.0	8.0	7.0	3.0	9.0
DEHU	8.0	6.0	7.0	4.0	9.0
EHS	7.0	7.0	3.0	3.0	8.0
HJG	8.0	7.0	5.0	5.0	4.0
HV	7.0	8.0	5.0	5.0	6.0
Kkurt	8.0	8.0	5.0	5.0	9.0
MKurt	7.0	8.0	4.0	5.0	8.0
MRSSkew	6.0	8.0	7.0	5.0	3.0
Mskew	7.0	7.0	5.0	2.0	8.0
PU	64.0	65.0	60.0	65.0	59.0
Energia	8.0	10.0	6.0	4.0	8.0
HZ	7.0	8.0	6.0	4.0	11.0
Royston	13.0	10.0	11.0	8.0	5.0
SW	6.0	4.0	3.0	6.0	4.0

La Tabla 8 muestra que las estimaciones de error tipo I de las pruebas se encuentran muy cerca del nivel alfa nominal (0,05). Salvo el caso de la prueba PU (Pudelko), en general, las tasas de error tipo I de estas pruebas variaron de 0 a 11% independientemente del tamaño de la muestra (n), cuando el número de variables $p = 4$ y variabilidad generalizada $v = 100$. La prueba PU (Pudelko) se mantiene con una alta tasa de rechazos que fluctúan entre 59 y 70%.

Tabla 8

Tasas de error tipo I en distribuciones de datos normal multivariada, con variabilidad generalizada = 100 (Escenarios del 16 al 20)

Pruebas MVN	ESCENARIOS				
	E_16	E_17	E_18	E_19	E_20
	p = 4 n =15	p = 4 n =25	p = 4 n =30	p = 4 n = 35	p = 4 n =45
BHEP	3.0	6.0	3.0	5.0	5.0
DEHT	9.0	0.0	6.0	9.0	6.0
DEHU	6.0	1.0	3.0	7.0	7.0
EHS	5.0	1.0	3.0	6.0	5.0
HJG	8.0	1.0	4.0	9.0	7.0
HV	9.0	1.0	4.0	8.0	6.0
Kkurt	8.0	1.0	5.0	8.0	7.0
MKurt	7.0	0.0	6.0	5.0	8.0
MRSSkew	6.0	6.0	4.0	7.0	4.0
Mskew	8.0	1.0	5.0	7.0	6.0
PU	59.0	70.0	66.0	62.0	68.0
Energía	3.0	5.0	2.0	5.0	4.0
HZ	3.0	3.0	3.0	5.0	5.0
Royston	8.0	4.0	3.0	11.0	5.0
SW	6.0	4.0	5.0	7.0	4.0

En la Tabla 9 se muestra que las estimaciones de error tipo I de las pruebas se encuentran muy cerca del nivel alfa nominal (0,05). Salvo el caso de la prueba PU (Pudelko), en general, las tasas de error tipo I de estas pruebas variaron de 2 a 10% independientemente del tamaño de la muestra (n), cuando el número de variables $p = 5$ y $p=6$ con variabilidad generalizada $v = 100$. La prueba PU (Pudelko) se mantiene con una alta tasa de rechazos que fluctúan entre 61 y 77%.

Tabla 9

Tasas de error tipo I en distribuciones de datos normal multivariada, con variabilidad generalizada = 100 (Escenarios del 21 al 25)

Pruebas MVN	ESCENARIOS				
	E_21	E_22	E_23	E_24	E_25
	p = 5 n =25	p = 5 n =30	p = 5 n = 35	p = 5 n =45	p = 6 n =30
BHEP	3.0	4.0	4.0	6.0	5.0
DEHT	7.0	7.0	7.0	5.0	5.0
DEHU	10.0	7.0	7.0	5.0	6.0
EHS	4.0	5.0	6.0	8.0	5.0
HJG	4.0	5.0	8.0	3.0	3.0
HV	4.0	5.0	8.0	3.0	3.0
Kkurt	8.0	6.0	10.0	3.0	4.0
MKurt	10.0	4.0	6.0	4.0	2.0
MRSSkew	7.0	7.0	9.0	5.0	2.0
Mskew	4.0	6.0	5.0	5.0	4.0
PU	61.0	63.0	77.0	66.0	69.0
Energía	5.0	4.0	4.0	6.0	4.0
HZ	3.0	2.0	3.0	5.0	5.0
Royston	7.0	9.0	8.0	10.0	9.0
SW	3.0	4.0	10.0	2.0	5.0

En la Tabla 10 se muestra que las estimaciones de error tipo I de las pruebas se encuentran muy cerca del nivel alfa nominal (0,05), en general, las tasas de error tipo I de estas pruebas variaron de 2 a 11% independientemente del tamaño de la muestra (n) y del número de variables, con variabilidad generalizada $v = 100$. Salvo el caso de la prueba PU (Pudelko) que se mantiene con una tasa de rechazos que fluctúan entre 63 y 70%.

Tabla 10

Tasas de error tipo I en distribuciones de datos normal multivariada, con variabilidad generalizada = 100 (Escenarios del 26 al 30)

Pruebas MVN	ESCENARIOS				
	E_26	E_27	E_28	E_29	E_30
	p = 6 n = 35	p = 6 n = 45	p = 7 n = 35	p = 7 n = 45	p = 8 n = 45
BHEP	8.0	8.0	5.0	8.0	8.0
DEHT	5.0	9.0	7.0	3.0	9.0
DEHU	8.0	6.0	7.0	4.0	9.0
EHS	7.0	7.0	3.0	5.0	8.0
HJG	8.0	7.0	5.0	2.0	4.0
HV	8.0	8.0	5.0	2.0	6.0
Kkurt	8.0	8.0	5.0	2.0	9.0
MKurt	7.0	8.0	4.0	3.0	8.0
MRSSkew	6.0	8.0	7.0	4.0	3.0
Mskew	8.0	7.0	6.0	6.0	7.0
PU	70.0	69.0	63.0	66.0	66.0
Energía	8.0	10.0	6.0	5.0	9.0
HZ	7.0	8.0	6.0	8.0	11.0
Royston	11.0	8.0	6.0	9.0	9.0
SW	5.0	4.0	8.0	9.0	2.0

4.1.2 Análisis de la Distribución t Multivariada

En las tablas del 11 al 16 se presentan las estimaciones de la potencia de prueba para las 15 pruebas de MVN, utilizando muestras de distribución t multivariada con 10 grados de libertad. Las estimaciones de potencia de prueba en todas las pruebas se ha encontrado que los valores fluctúan en un rango de 10% a 48%, el valor máximo de potencia de prueba se obtuvo cuando se aplicó la prueba PU (78 %) considerando n=45 y p=4. Ninguna de las otras pruebas alcanzó lo suficiente como para probar un valor de potencia del 80,00% en las circunstancias experimentales de n y p.

Tabla 11

Potencia de la prueba en distribuciones de datos t multivariada con 10 grados de libertad, con variabilidad generalizada = 1 (Escenarios del 1 al 5)

Pruebas MVN	ESCENARIOS				
	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
	p = 4 n =15	p = 4 n =25	p = 4 n =30	p = 4 n = 35	p = 4 n =45
BHEP	13.0	13.0	19.0	18.0	18.0
DEHT	17.0	27.0	28.0	41.0	36.0
DEHU	17.0	23.0	27.0	39.0	34.0
EHS	11.0	19.0	13.0	21.0	21.0
HJG	14.0	23.0	25.0	32.0	39.0
HV	16.0	26.0	26.0	36.0	41.0
Kkurt	17.0	24.0	29.0	43.0	44.0
MKurt	13.0	23.0	29.0	51.0	48.0
MRSSkew	13.0	20.0	20.0	27.0	27.0
Mskew	16.0	24.0	18.0	34.0	29.0
PU	67.0	66.0	70.0	75.0	78.0
Energía	13.0	21.0	21.0	21.0	21.0
HZ	10.0	10.0	17.0	14.0	13.0
Royston	12.0	18.0	19.0	36.0	40.0
SW	10.0	6.0	16.0	21.0	23.0

Tabla 12

Potencia de la prueba en distribuciones de datos t multivariada con 10 grados de libertad, con variabilidad generalizada = 1 (Escenarios del 6 al 10)

Pruebas MVN	ESCENARIOS				
	E_6	E_7	E_8	E_9	E_10
	p = 5 n =25	p = 5 n =30	p = 5 n = 35	p = 5 n =45	p = 6 n =30
BHEP	28.0	10.0	14.0	20.0	13.0
DEHT	59.0	20.0	41.0	55.0	42.0
DEHU	57.0	18.0	41.0	58.0	37.0
EHS	35.0	44.0	16.0	30.0	16.0
HJG	56.0	22.0	30.0	43.0	34.0
HV	55.0	88.0	41.0	52.0	38.0
Kkurt	35.0	35.0	44.0	54.0	39.0
MKurt	36.0	36.0	49.0	56.0	44.0
MRSSkew	26.0	26.0	30.0	38.0	21.0
Mskew	36.0	36.0	32.0	51.0	38.0
PU	75.0	75.0	77.0	76.0	77.0
Energía	32.0	22.0	27.0	38.0	23.0
HZ	18.0	9.0	14.0	15.0	10.0
Royston	28.0	26.0	28.0	43.0	26.0
SW	12.0	14.0	18.0	22.0	15.0

Tabla 13

Potencia de la prueba en distribuciones de datos t multivariada con 10 grados de libertad, con variabilidad generalizada = 1 (Escenarios del 11 al 15)

Pruebas MVN	ESCENARIOS				
	E_11	E_12	E_13	E_14	E_15
	p = 6 n = 35	p = 6 n = 45	p = 7 n = 35	p = 7 n = 45	p = 8 n = 45
BHEP	20.0	26.0	13.0	21.0	20.0
DEHT	46.0	59.0	59.0	71.0	65.0
DEHU	45.0	54.0	57.0	72.0	73.0
EHS	19.0	17.0	17.0	22.0	16.0
HJG	38.0	47.0	44.0	55.0	53.0
HV	43.0	49.0	50.0	60.0	57.0
Kkurt	47.0	57.0	55.0	71.0	66.0
MKurt	48.0	66.0	59.0	75.0	71.0
MRSSkew	25.0	38.0	39.0	50.0	50.0
Mskew	46.0	52.0	55.0	58.0	59.0
PU	75.0	84.0	69.0	79.0	76.0
Energía	30.0	41.0	41.0	49.0	54.0
HZ	17.0	20.0	13.0	19.0	18.0
Royston	40.0	49.0	40.0	38.0	45.0
SW	23.0	30.0	13.0	17.0	21.0

Tabla 14

Potencia de la prueba en distribución de datos t multivariada con 10 grados de libertad, con variabilidad generalizada = 100 (Escenarios del 16 al 20)

Pruebas MVN	ESCENARIOS				
	E_16	E_17	E_18	E_19	E_20
	p = 4 n =15	p = 4 n =25	p = 4 n =30	p = 4 n = 35	p = 4 n =45
BHEP	9.0	31.0	43.0	43.0	69.0
DEHT	6.0	18.0	16.0	12.0	20.0
DEHU	4.0	30.0	32.0	27.0	58.0
EHS	10.0	41.0	47.0	52.0	80.0
HJG	7.0	14.0	16.0	7.0	14.0
HV	6.0	14.0	15.0	8.0	15.0
Kkurt	6.0	10.0	11.0	6.0	10.0
MKurt	2.0	6.0	5.0	3.0	8.0
MRSSkew	8.0	12.0	10.0	5.0	4.0
Mskew	9.0	17.0	20.0	16.0	28.0
PU	70.0	16.0	85.0	32.0	91.0
Energía	7.0	29.0	33.0	33.0	56.0
HZ	6.0	34.0	40.0	42.0	73.0
Royston	26.0	50.0	55.0	60.0	86.0
SW	17.0	32.0	39.0	37.0	53.0

Tabla 15

Potencia de la prueba en distribuciones de datos t multivariada con 10 grados de libertad, con variabilidad generalizada = 100 (Escenarios del 21 al 25)

Pruebas MVN	ESCENARIOS				
	E_21	E_22	E_23	E_24	E_25
	p = 5 n =25	p = 5 n =30	p = 5 n = 35	p = 5 n =45	p = 6 n =30
BHEP	9.0	10.0	14.0	14.0	11.0
DEHT	19.0	18.0	14.0	34.0	19.0
DEHU	15.0	16.0	14.0	32.0	21.0
EHS	17.0	15.0	22.0	21.0	18.0
HJG	17.0	15.0	15.0	28.0	20.0
HV	19.0	16.0	16.0	32.0	21.0
Kkurt	21.0	13.0	11.0	30.0	20.0
MKurt	15.0	13.0	11.0	24.0	20.0
MRSSkew	14.0	10.0	15.0	23.0	13.0
Mskew	17.0	18.0	20.0	33.0	21.0
PU	79.0	76.0	66.0	74.0	71.0
Energía	12.0	11.0	15.0	24.0	19.0
HZ	7.0	11.0	13.0	13.0	10.0
Royston	26.0	29.0	34.0	51.0	31.0
SW	14.0	15.0	23.0	32.0	19.0

Tabla 16

Potencia de la prueba en distribuciones de datos t multivariada con 10 grados de libertad, con variabilidad generalizada = 100 (Escenarios del 26 al 30)

Pruebas MVN	ESCENARIOS				
	E_26	E_27	E_28	E_29	E_30
	p = 6 n = 35	p = 6 n =45	p = 7 n = 35	p = 7 n =45	p = 8 n =45
BHEP	13.0	14.0	11.0	16.0	18.0
DEHT	29.0	36.0	31.0	49.0	63.0
DEHU	22.0	35.0	31.0	44.0	62.0
EHS	17.0	25.0	17.0	28.0	23.0
HJG	27.0	30.0	27.0	30.0	50.0
HV	29.0	32.0	31.0	35.0	56.0
Kkurt	27.0	35.0	32.0	39.0	61.0
MKurt	24.0	34.0	30.0	42.0	61.0
MRSSkew	20.0	24.0	20.0	29.0	36.0
Mskew	31.0	33.0	32.0	44.0	60.0
PU	69.0	70.0	71.0	82.0	73.0
Energía	16.0	21.0	21.0	38.0	41.0
HZ	8.0	11.0	9.0	14.0	18.0
Royston	43.0	53.0	58.0	61.0	70.0
SW	31.0	31.0	28.0	38.0	49.0

4.1.3 Análisis de la Distribución Cauchy Multivariada

En el caso de las estimaciones de potencia de la prueba bajo la distribución Cauchy multivariada, todas las pruebas indicaron una alta potencia de la prueba para esta distribución sesgada, las cuales se muestran en las tablas del 17 al 22. Todas las estimaciones de cada potencia de prueba se han registrado 100.0% o muy cercanos al 100.0%, en combinaciones completas de n y p, excepcionalmente en unos pocos casos cuando n = 15.

Tabla 17

Potencia de la prueba en distribuciones de datos Cauchy multivariada, con variabilidad generalizada = 1 (Escenarios del 1 al 5)

Pruebas MVN	ESCENARIOS				
	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
	p = 4 n =15	p = 4 n =25	p = 4 n =30	p = 4 n = 35	p = 4 n =45
BHEP	96.0	99.0	100.0	100.0	100.0
DEHT	99.0	100.0	100.0	100.0	100.0
DEHU	99.0	100.0	100.0	100.0	100.0
EHS	98.0	99.0	100.0	100.0	100.0
HJG	97.0	100.0	100.0	100.0	100.0
HV	98.0	100.0	100.0	100.0	100.0
Kkurt	99.0	100.0	100.0	100.0	100.0
MKurt	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
MRSSkew	97.0	99.0	100.0	100.0	100.0
Mskew	99.0	100.0	100.0	100.0	100.0
PU	92.0	97.0	99.0	100.0	100.0
Energía	98.0	99.0	100.0	100.0	100.0
HZ	92.0	99.0	100.0	100.0	100.0
Royston	96.0	100.0	100.0	100.0	100.0
SW	65.0	98.0	100.0	100.0	100.0

Tabla 18

Potencia de la prueba en distribuciones de datos Cauchy multivariada, con variabilidad generalizada = 1 (Escenarios del 6 al 10)

Pruebas MVN	ESCENARIOS				
	E_6	E_7	E_8	E_9	E_10
	p = 5 n =25	p = 5 n =30	p = 5 n = 35	p = 5 n =45	p = 6 n =30
BHEP	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
DEHT	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
DEHU	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
EHS	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
HJG	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
HV	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
Kkurt	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
MKurt	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
MRSSkew	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
Mskew	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
PU	100.0	99.0	100.0	100.0	100.0
Energía	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
HZ	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
Royston	100.0	100.0	100.0	100.0	99.0
SW	98.0	100.0	100.0	100.0	99.0

Tabla 19

Potencia de la prueba en distribuciones de datos Cauchy multivariada, con variabilidad generalizada = 1 (Escenarios del 11 al 15)

Pruebas MVN	ESCENARIOS				
	E_11	E_12	E_13	E_14	E_15
	p = 6 n = 35	p = 6 n = 45	p = 7 n = 35	p = 7 n = 45	p = 8 n = 45
BHEP	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
DEHT	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
DEHU	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
EHS	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
HJG	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
HV	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
Kkurt	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
MKurt	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
MRSSkew	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
Mskew	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
PU	100.0	99.0	99.0	100.0	100.0
Energía	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
HZ	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
Royston	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
SW	100.0	100.0	99.0	100.0	100.0

Tabla 20

Potencia de la prueba en distribuciones de datos Cauchy multivariada, con variabilidad generalizada = 100 (Escenarios del 16 al 20)

Pruebas MVN	ESCENARIOS				
	E_16	E_17	E_18	E_19	E_20
	p = 4 n =15	p = 4 n =25	p = 4 n =30	p = 4 n = 35	p = 4 n =45
BHEP	95.0	95.0	100.0	100.0	100.0
DEHT	96.0	100.0	100.0	100.0	100.0
DEHU	96.0	100.0	100.0	100.0	100.0
EHS	95.0	100.0	100.0	100.0	100.0
HJG	93.0	100.0	100.0	100.0	100.0
HV	96.0	100.0	100.0	100.0	100.0
Kkurt	96.0	100.0	100.0	100.0	100.0
MKurt	95.0	100.0	100.0	100.0	100.0
MRSSkew	92.0	100.0	100.0	99.0	100.0
Mskew	96.0	100.0	100.0	100.0	100.0
PU	89.0	96.0	100.0	99.0	100.0
Energía	96.0	100.0	100.0	100.0	100.0
HZ	93.0	100.0	100.0	100.0	100.0
Royston	95.0	100.0	100.0	100.0	100.0
SW	73.0	97.0	100.0	100.0	100.0

Tabla 21

Potencia de la prueba en distribución de datos Cauchy multivariada, con
variabilidad generalizada = 100 (Escenarios del 21 al 25)

Pruebas MVN	ESCENARIOS				
	E_21	E_22	E_23	E_24	E_25
	p = 5 n =25	p = 5 n =30	p = 5 n = 35	p = 5 n =45	p = 6 n =30
BHEP	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
DEHT	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
DEHU	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
EHS	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
HJG	99.0	100.0	100.0	100.0	100.0
HV	99.0	100.0	100.0	100.0	100.0
Kkurt	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
MKurt	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
MRSSkew	99.0	100.0	100.0	100.0	100.0
Mskew	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
PU	96.0	97.0	99.0	100.0	96.0
Energía	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
HZ	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
Royston	99.0	100.0	100.0	100.0	100.0
SW	97.0	100.0	100.0	100.0	99.0

Tabla 22

Potencia de la prueba en distribuciones de datos Cauchy multivariada, con variabilidad generalizada = 100 (Escenarios del 26 al 30)

Pruebas MVN	ESCENARIOS				
	E_26	E_27	E_28	E_29	E_30
	p = 6 n = 35	p = 6 n =45	p = 7 n = 35	p = 7 n =45	p = 8 n =45
BHEP	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
DEHT	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
DEHU	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
EHS	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
HJG	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
HV	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
Kkurt	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
MKurt	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
MRSSkew	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
Mskew	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
PU	99.0	100.0	100.0	99.0	99.0
Energía	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
HZ	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
Royston	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
SW	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0

4.1.4 Aplicación de la Técnica de Escalamiento Multidimensional

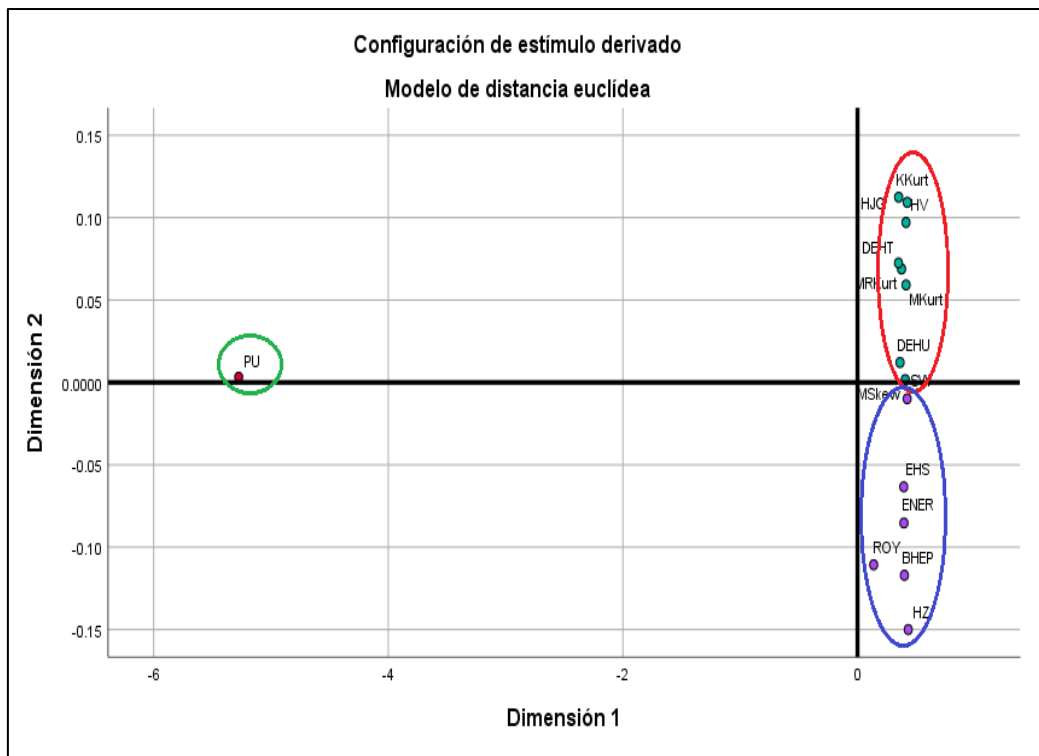
Con los resultados obtenidos mostrados en las Tablas de 5 a 22, se aplicó la Técnica de Escalamiento Multidimensional (MDS) con el objetivo de clasificar las 15 pruebas utilizadas en la investigación, en función de su desempeño de la tasa de error Tipo I para las distribuciones MVN y la potencia de la prueba para las distribuciones t multivariada y Cauchy multivariada, en las condiciones definidas en los escenarios considerados y determinar las pruebas que revelaron desempeños similares o diferentes.

Los resultados relacionados con el error tipo I de la prueba para la

distribución MVN se muestran en las figuras 1 y 2.

Figura 1.

Desempeño de las pruebas de MVN según el MDS para estimaciones de error tipo I



El Análisis MDS ha permitido clasificar estas pruebas con respecto a las estimaciones de error de tipo I bajo diferentes combinaciones de condiciones (Figura 1). Para determinar la bondad del modelo de la técnica MDS para evaluar las estimaciones de error de tipo I de las 15 pruebas simultáneamente, se tuvo en cuenta dos criterios diferentes de bondad de ajuste, el coeficiente de estrés y el coeficiente de correlación R^2 , los valores de *stress* y de R^2 (0,026 y 0,999) indicaron que la técnica MDS fue una buena

elección para evaluar el rendimiento de estas pruebas.

En la Figura 1 se presenta pruebas que son similares y pruebas que son diferentes con respecto a sus estimaciones de error de Tipo I en todas las combinaciones de tamaños de muestra, número de variables que intervienen y la variabilidad generalizada. En dicha figura se aprecia que las pruebas KKurt, HJG, HV, DEHT, MRKurt, Mkurt, DEHU y SW se colocan en un primer grupo, lo que significa que estas pruebas produjeron resultados muy similares en términos de retención de la tasa de error de tipo I en el nivel alfa nominal (0,05) o que los desempeños de estas pruebas son bastante similares entre sí. Por otro lado, las pruebas MSkew, EHS, ENER, ROY, BHEP y HZ se agruparon en una posición contraria, lo cual indica que este grupo es diferente al primer grupo. En consecuencia, las estimaciones de error tipo I generan dos grupos de pruebas.

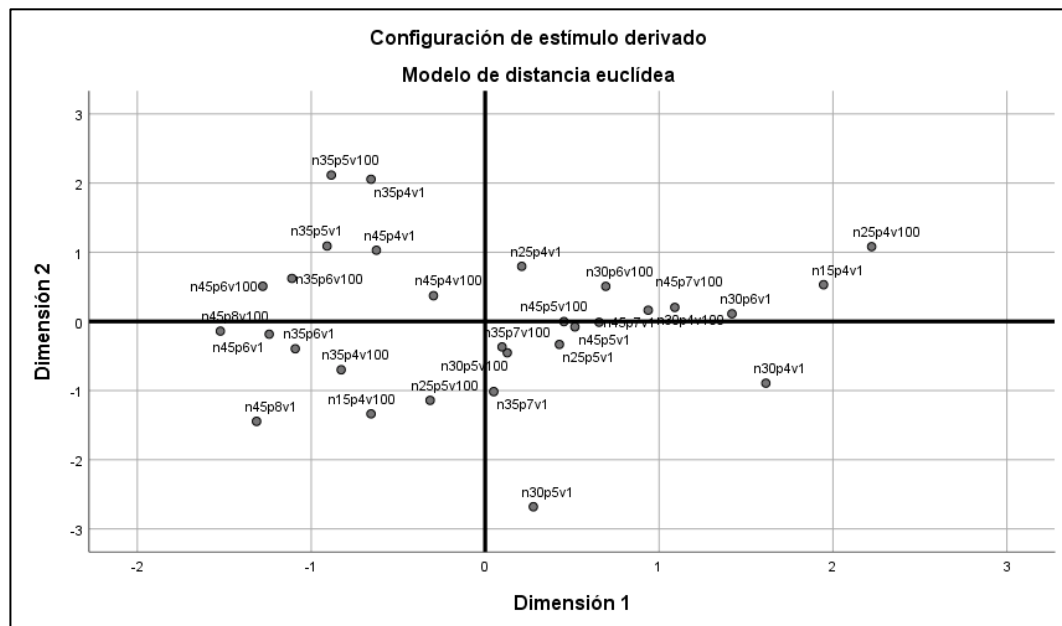
En esa misma figura se puede observar que la prueba de Pudelko (PU) se diferencia de los otros dos grupos.

Al determinar el comportamiento de los factores que afectan el error tipo I, en la Figura 2 se presentan estimaciones encontradas en las 15 pruebas utilizadas en la presente investigación. Los resultados de la técnica MDS muestran que las estimaciones del error tipo I no se ven afectadas por el tamaño de la muestra, el número de variables que intervienen o por la variabilidad generalizada del conjunto de los datos.

En la figura 2 se aprecia que tanto el tamaño de muestra $n = 15, 25, 30, 35$ y 45 , el número de variables que intervienen $p = 4, 5, 6, 7$ y 8 ; y la variabilidad generalizada $v = 1, 100$, se presentan en todos los cuadrantes, no existe una similitud o diferencia que permita inferir que el aumento o disminución de determinado factor: tamaño de la muestra, número de variables que intervienen o variabilidad generalizada, afecten la estimación del error tipo I.

Figura 2.

Resultado de MDS para determinar los factores que afectan las estimaciones del error tipo I

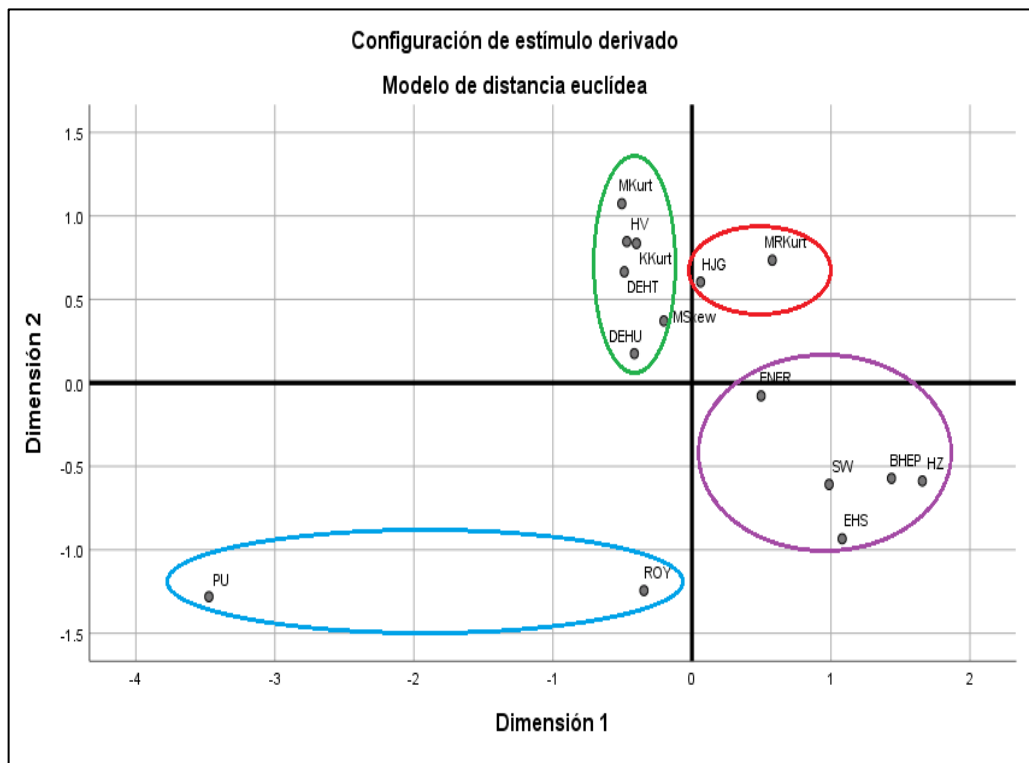


En las Figuras 3 y 4 se señalan mediante el uso de la técnica MDS, el comportamiento de las pruebas MVN, en términos de estimaciones de potencia de prueba cuando se tomaron muestras de la distribución t multivariante con 10 grados de libertad y distribución multivariante de

Cauchy, respectivamente.

Figura 3.

Desempeño de las pruebas de MVN según el MDS para estimaciones de la potencia de la prueba en una distribución t multivariada (10 g.l.)



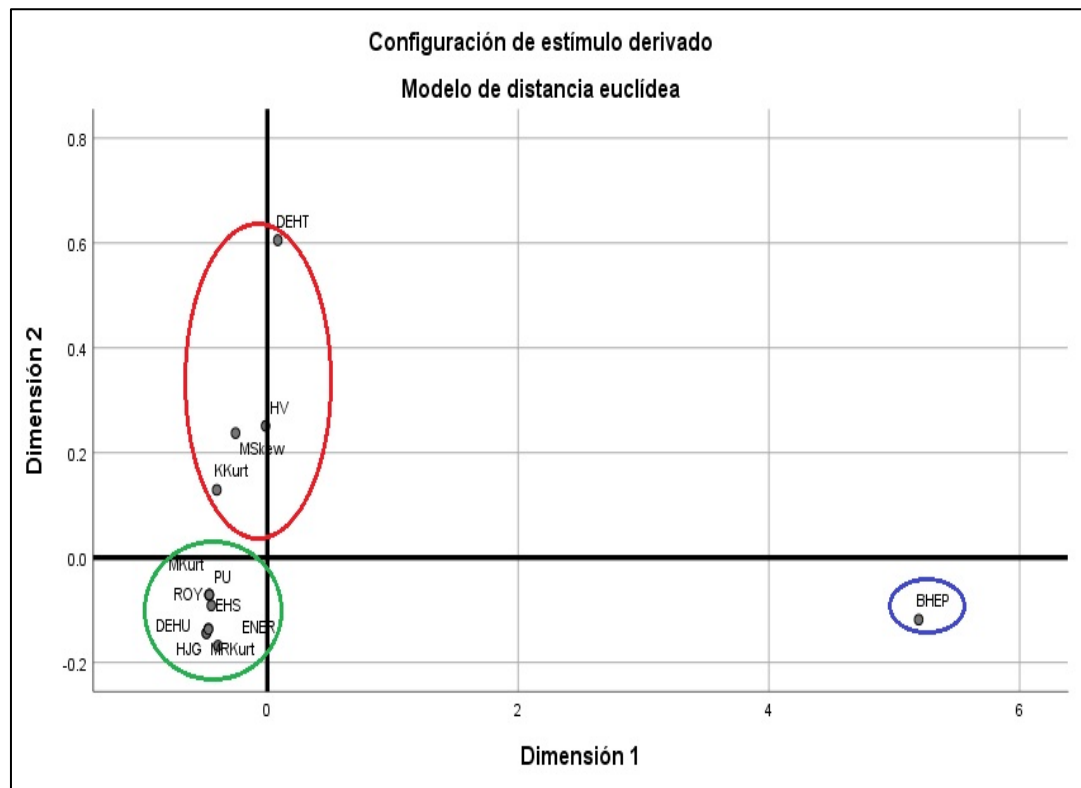
Cuando se tomaron muestras con distribuciones t multivariadas con 10 grados de libertad, se aprecia en la Figura 3, que las pruebas se dispersan en cuatro grupos diferentes. Las pruebas MRKurt y HJG conforman un grupo, las pruebas MKurt, HV, KKurt, DEHT, MSkew y DEHU conforman un segundo grupo, las pruebas PU y ROY conforman un tercer grupo y las pruebas ENER, SW, BHEP, HZ y EHS conforman otro grupo. Se puede inferir que los desempeños de cada grupo son diferentes, es decir existen 4

conjuntos de pruebas MVN que nos permite inferir cuatro niveles de potencia de estimación. Para este caso, los criterios de bondad de ajuste, el coeficiente de correlación y coeficiente de estrés, tomaron los valores de *stress* y R^2 (0,081 y 0,981), respectivamente.

En la Figura 4 se señalan mediante el uso de la técnica MDS, el comportamiento de las pruebas MVN, en términos de estimaciones de potencia de prueba cuando se tomaron muestras de la distribución multivariante de Cauchy. En dicha gráfica, se aprecia que las pruebas se dispersan en tres grupos diferentes. Las pruebas DEHT, HV, MSkew y KKurt conforman un grupo, las pruebas MKurt, PU, KKurt, EHS, ENER, MRkurt, HJG, ROY y DEHU conforman un segundo grupo, mientras que la prueba BHEP, está aislada del resto, conforma un tercer grupo. Se puede inferir que los desempeños de cada grupo son diferentes, es decir existen 3 grupos de pruebas MVN que nos permite inferir tres niveles de potencia de estimación. Para el caso de la distribución de Cauchy, los criterios de bondad de ajuste, el coeficiente de *stress* y coeficiente de correlación tomaron los valores de *stress* y R^2 (0,034 y 0,999), respectivamente.

Figura 4

Desempeño de las pruebas de MVN según el MDS para estimaciones de la potencia de la prueba en una distribución Cauchy multivariada



Es necesario precisar que los niveles que existen (dada la agrupación identificada), tanto en la distribución t multivariada, como en la distribución multivariada de Cauchy no están conformadas por las mismas pruebas de MVN, existe un agrupamiento que no obedece estrictamente a la naturaleza de las condiciones de tamaño de muestra, número de variables que intervienen y la variabilidad generalizada, quizás estén más relacionados por los niveles de simetría y curtosis de la distribución de los datos.

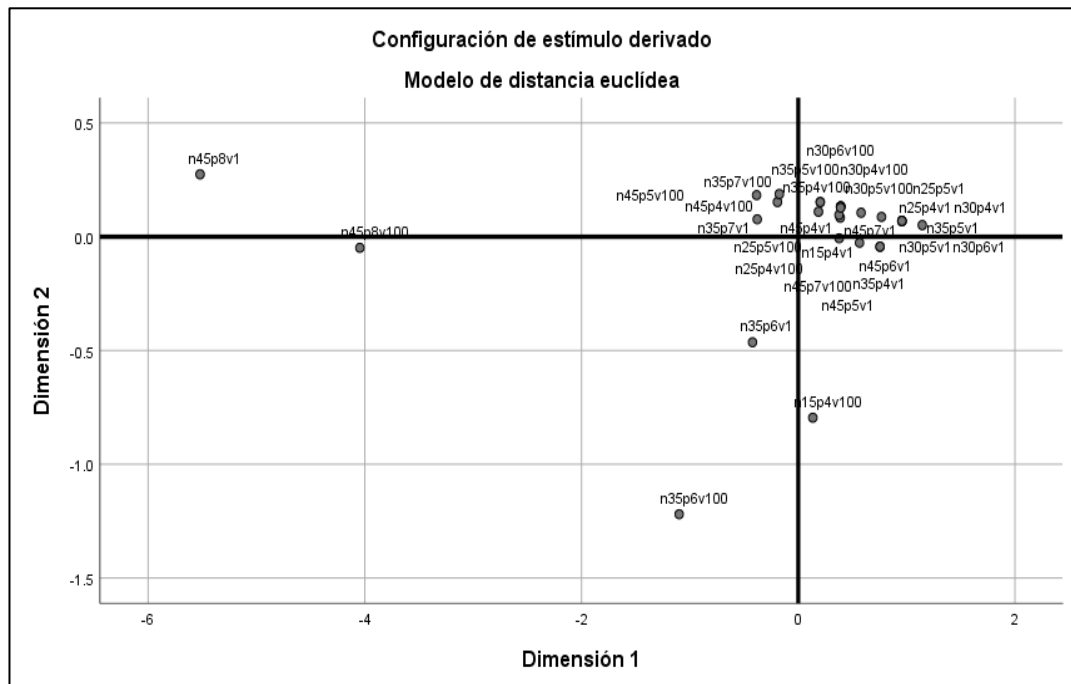
Tampoco están agrupados por el criterio utilizado por Baringhaus, Danschke

y Henze (1989), en el cual establece cuatro categorías (enfoque gráfico, métodos de bondad de ajuste, métodos multivariados de asimetría y curtosis y métodos multivariados consistente e invariantes).

Cuando se analiza el comportamiento de los factores que afectan la potencia de la prueba, en las Figuras 5 y 6 se presentan estimaciones encontradas en las 15 pruebas utilizadas en la presente investigación, para la distribución t multivariada y la distribución Cauchy multivariada, respectivamente.

Figura 5.

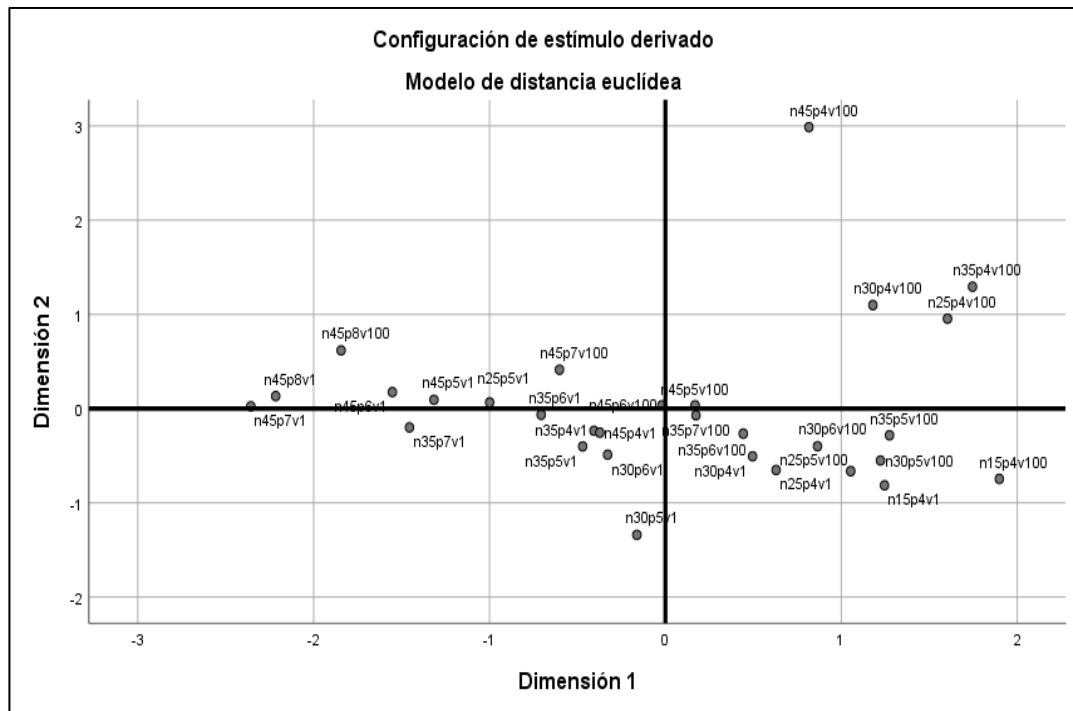
Resultado de MDS para determinar los factores que afectan las estimaciones de la potencia de la prueba en una distribución t multivariada con 10 g.l.



Los resultados de la técnica MDS, en la figura 5, muestran que las estimaciones de la potencia de la prueba no están afectadas por el tamaño de la muestra, el número de variables utilizadas o por la variabilidad generalizada del conjunto de los datos.

Figura 6.

Resultado de MDS para determinar los factores que afectan las estimaciones de la potencia de la prueba en una distribución Cauchy multivariada.



En la figuras mencionadas se aprecia que tanto el tamaño de muestra $n = 15, 25, 30, 35$ y 45 , el número de variables $p = 4, 5, 6, 7$ y 8 ; y la variabilidad generalizada $v = 1, 100$, se presentan en todos los cuadrantes, no existe una similitud o diferencia que permita inferir que el aumento o disminución de

determinado factor: tamaño de la muestra, número de variables o variabilidad generalizada, afecten la estimación de la potencia de la prueba, tanto en la distribución t multivariada como en la distribución Cauchy multivariada.

Se podría afirmar, que cuando el tamaño de la muestra tiende a aumentar, algunas pruebas se van distanciando de los agrupamientos, tanto en la distribución t multivariada como en la distribución Cauchy multivariada.

4.2 DISCUSIÓN

Se sabe que para la aplicación de los métodos multivariados es de vital importancia conocer si los datos proceden de una distribución normal multivariada. Sin embargo, en muchos casos, no se evalúa la suposición de normalidad multivariante. Esta situación puede llevar a la consecución de resultados que no corresponden a la realidad que se estudia.

En la actualidad existen diversas pruebas para aplicar a una distribución de datos y determinar si estos cumplen con el supuesto de MVN, esta variedad de pruebas, han sido clasificadas de diferentes maneras; Cox y Small (1978), por ejemplo, clasificaron las pruebas según la dependencia de coordenadas o invariancia afín, mientras que Ward (1988) clasificó las pruebas en función de si eran combinaciones de procedimientos univariados o pruebas verdaderamente multivariantes. Romeu y Ozturk (1993) establecieron una clasificación más específica para agrupar las pruebas en seis categorías: (i) procedimientos esencialmente

multivariados, (ii) métodos multivariados de análisis marginal, (iii) métodos de regresión, (iv) métodos basados en el principio de unión-intersección, (v) métodos geométricos, y (vi) métodos de proyección. Finalmente, se tiene las categorías de Baringhaus, Danschke y Henze (1989): (i) enfoques gráficos para probar la normalidad multivariante, (ii) métodos multivariados de bondad de ajuste, (iii) métodos multivariados de asimetría y curtosis, y, (iv) métodos multivariados consistentes e invariantes.

En la presente investigación, se ha generado y evaluado diferentes distribuciones de datos MVN, para comparar el desempeño de las siguientes pruebas de MVN: la Prueba de BHEP (BHEP), Prueba estadística de DEH basada en la oscilación armónica (DEHT), Prueba estadística basada en la doble estimación de una característica PDE (DEHU), Prueba Estadística basada en una ecuación multivariante de Stein (EHS), Prueba estadística de Henze-Jimenez-Gamero (HJG), Prueba Estadística de Henze-Visage (HV), Medida de Koziols de la curtosis multivariante de la muestra (KKurt), Medida de Mardia de la curtosis muestral multivariante (MKurt), Prueba de Curtosis de Mori, Rohatgi y Szekely (MRKurt), Prueba de Mardia para la asimetría multivariante de la muestra (MSkew), Prueba de Pudalko (PU), Prueba de Energía (ENER), Prueba estadística de Henze Zirkler (HZ), Prueba de Royston (ROY), Prueba generalizada de Shapiro Wilk (de Villasenor-Alva y Gonzalez-Estrada) (SW).

También se generó y evaluó diferentes distribuciones de datos t multivariada y Cauchy multivariada, para evaluar la potencia de las pruebas de MVN.

A los resultados obtenidos, se le aplicó la técnica de Escalamiento Multidimensional (MDS) para clasificar las pruebas que han tenido un desempeño similar y los factores que han afectado al desempeño de dichas pruebas.

Los resultados obtenidos mostraron que ninguna de las pruebas utilizadas en la presente investigación puede ser mencionada como la prueba más apropiada para usar en la prueba de supuesto de distribución de MVN, con respecto al tamaño de la muestra, el número de variables que intervienen y la variabilidad generalizada.

Mecklin y Mundfrom (2005) concluyeron que no hubo una sola prueba que fuera la más potente en todas las circunstancias durante los estudios de simulación cuando se comparó el rendimiento de 13 pruebas MVN en función de 10000 simulaciones.

Farrell et al. (2007) realizaron un estudio de simulación para comparar el tamaño y la potencia de la prueba de Royston, Doornik y Hansen y Henze y Zirkler. Informaron que la prueba de Royston produjo los mejores resultados con respecto a las tasas de error empírico de Tipo I, que oscilaron entre el 4,54% y el 5,26% en todas las combinaciones de n y p .

Las estimaciones para la prueba Doornik y Hansen también fueron extremadamente buenas en todos los casos. También informaron que la prueba de Henze y Zirkler generalmente posee un buen poder en las distribuciones alternativas investigadas, particularmente para $n \geq 75$.

Al comparar los resultados obtenidos con los de otros estudios, notamos algunas diferencias importantes que pueden deberse al uso de diferentes rutinas de generación de datos, diferencias en las condiciones experimentales y número de simulaciones en ejecución, así como el uso de distintas distribuciones de datos como la distribución Chi-cuadrado, distribución bivariada normal, distribuciones mixtas, distribución uniforme, etc.

V. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1 CONCLUSIONES

Luego de cumplir los objetivos propuestos, basadas en las evaluaciones de 15 pruebas de MVN aplicadas a las simulaciones de distribuciones de datos en los diferentes escenarios contruidos, se llegó a las siguientes conclusiones:

1. Considerando el objetivo general propuesto en el presente estudio, luego de contrastar la hipótesis de investigación: probar el cumplimiento del supuesto de Normalidad Multivariante (MVN), de 15 pruebas de MVN seleccionadas, según su desempeño, se encontró evidencias suficientes para concluir, que las pruebas de normalidad multivariante, no responden a clases pre establecidas, de acuerdo a los escenarios contruidos en

función al tamaño de muestra, número de variables que intervienen y la variabilidad generalizada.

2. Cuando se aplicó las pruebas de MVN a conjuntos de datos con distribución MVN, existen grupos diferenciados entre las pruebas de MVN, pero el agrupamiento encontrado no son debido a las condiciones dadas en las características de los escenarios planteados, sino a otras condiciones multivariadas (simetría, curtosis, la correlación múltiple entre variables, la dependencia lineal, etc.) establecidas en la distribución de datos a la cual se le aplicó una prueba MVN para evaluar el supuesto de normalidad multivariada.
3. Cuando se aplicó las pruebas de MVN a conjuntos de datos con distribución t multivariada y Cauchy multivariada, no existen grupos diferenciados entre las pruebas de MVN, existe una leve tendencia de agrupamiento cuando el tamaño de la muestra aumentaba. Si se evidenció que la potencia de la prueba fue más rigurosa en el caso de la distribución Cauchy multivariada, que en la distribución t multivariada con 10 grados de libertad.

5.2 RECOMENDACIONES

La investigación realizada ratifica las conclusiones de algunos investigadores en el sentido de que ninguna de las pruebas MVN es lo suficientemente bueno en lo que respecta a las pruebas de normalidad multivariante. En la actualidad existen procedimientos más complejos,

como las generalizaciones de las pruebas univariadas o la clase más nueva de pruebas consistentes, por lo que se requeriría continuación en esta línea con más investigaciones.

Ampliar el número de pruebas utilizadas para evaluar la normalidad multivariante, específicamente porque los resultados de esta tesis contradicen algunos de los hallazgos reportados en otros estudios. Se recomienda realizar estudios con métodos de prueba más actuales.

Utilizar tamaños de muestra, dimensiones y réplicas más grandes. Esto debería proporcionar una mejor visión del desempeño de estas estadísticas de prueba para evaluar la normalidad multivariante de un conjunto de datos dado.

VI. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Y VIRTUALES

- Alpu, Ö., & Yuksek, D. (2016). Comparison of some multivariate normality tests: A simulation study. *International Journal of Advanced and Applied Sciences*, 3(12).
- Andrews, D.F., Gnanadesikan, R. y Warner, J.L. (1973). Métodos para evaluar la normalidad multivariada. En *Análisis multivariado—III* (págs. 95-116). Prensa Académica.
- Baringhaus, L. y Henze, N. (1988). Una prueba consistente para la normalidad multivariada basada en la función característica empírica. *Metrika*, 35 (1), 339-348.
- Baringhaus, L., Danschke, R. y Henze, N. (1989). Pruebas recientes y clásicas de normalidad: un estudio comparativo. *Comunicaciones en Estadística-Simulación y Cómputo*, 18 (1), 363-379.
- Baxter, M.J. (1997, April). Testing multivariate normality, with applications to lead isotope data analysis in archaeology. Paper presented at the 25th Anniversary Conference of Computer Applications and Quantitative Methods in Archaeology.
- Bellman, R. (1961). *Adaptive Control Processes: a guided tour*. Princeton

University Press.

- Bera, A. y John, S. (1983). Pruebas de normalidad multivariante con alternativas de Pearson. *Comunicaciones en Estadística-Teoría y Métodos*, 12 (1), 103-117.
- Bogdan, M. (1999). Data driven smooth tests for bivariate normality. *Journal of Multivariate Analysis*, 68, 26-52.
- Canal, S. Y., Elorza, M. C. J., & Morales, J. C. C. (1999). Una revisión de medidas multivariadas de asimetría y Kurtosis para pruebas de multinormalidad. *Revista Colombiana de Estadística*, 22(2).
- Closas, A.H., Arriola, E.A., Kuc Zening, C.I., Amarilla, M.R. y Jovanovich, E.C. (2013). Análisis multivariante, conceptos y aplicaciones en Psicología Educativa y Psicometría. *Enfoques*, 25 (1), 65-92.
- Cox, D. R., & Small, N. J. H. (1978). Testing multivariate normality. *Biometrika*, 65(2), 263-272.
- Csörgő, M., & Horváth, L. (1989). Invariance principles for changepoint problems. In *Multivariate statistics and probability* (pp. 151-168). Academic Press.
- Cuadras, C. M. (2014). *Nuevos métodos de análisis multivariante*. Barcelona, Spain: CMC Editions.
- Doomik, J.A. and Hansen, D. (1994). *An Omnibus Test for Univariate and Multivariate Normality*, Working Paper, Nuffield College, Oxford.
- Dörr Ph, Ebner B, Henze N (2020) A new test of multivariate normality by a double estimation in a characterizing PDE. *Metrika*. <https://doi.org/10.1007/s00184-020-00795-x>
- Ebner, B., & Henze, N. (2020). Tests for multivariate normality—a critical review with emphasis on weighted L2-statistics. *Test*, 29(4), 845-892.
- Epps, T.W. and Pulley, Lawrence B. (1983). A Test for Normality Based on the Empirical Characteristic Function. *Biometrika*, Vol. 70, No. 3, 723-726.
- Epps, T.W. y Polea, L.B. (1983). Una prueba de normalidad basada en la función

característica empírica. *Biometrika*, 70 (3), 723-726.

Farrell, P. J., Salibian-Barrera, M., & Naczk, K. (2007). On tests for multivariate normality and associated simulation studies. *Journal of statistical computation and simulation*, 77(12), 1065-1080.

Gnanadesikan, R. (1977). *Methods for statistical data analysis of multivariate observations*. New York: Wiley.

Gómez, A., Gutiérrez, A. K., & Gutiérrez, J. C. (2017). Estimación robusta de betas y el ratio de cobertura sobre futuros de índices bursátiles en el Mercado Integrado Latinoamericano (MILA). *Ecos de Economía*, 21(44), 37-71.

Hair, J. F., Anderson, R. E., Tatham, R. L., & Black, W. C. (2004). *Análisis multivariante*.

Hanusz, Z., Enomoto, R., Seo, T. y Koizumi, K. (2018). Una comparación de Monte Carlo de las pruebas tipo Jarque-Bera y la prueba de normalidad multivariada de Henze-Zirkler. *Comunicaciones en Estadística-Simulación y Computación*, 47 (5), 1439-1452.

Hampel, F. (1968). *Contribution to the theory of robust estimation*. Berkeley: PhD thesis, University of California.

Hampel, F.R., Ronchetti, E.M., Rousseeuw, P.J., & Stahel, W.A. (1985). *Robust statistics: The approach based on influence functions*. New York: Wiley.

Hawkins, D.M. (1981). A new test for multivariate normality and homoscedasticity. *Technometrics* 23 105-110.

Healy, M. J. R. (1968). Multivariate Normal Plotting. *Appl. Statist.*, 17,157-161.

Henze, N., & Jiménez-Gamero, MD (2019). Una nueva clase de pruebas para multinormalidad con datos iid y garch basados en la función generadora de momentos empíricos. *Prueba*, 28 (2), 499-521.

Henze N, Visagie J (2020) Testing for normality in any dimension based on a partial differential equation involving the moment generating function. *Ann Inst Stat Math* 72:1109–1136

- Henze N and Zirkler B (1990). A class of invariant consistent tests for multivariate normality. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 19(10): 3595-3617.
- Hogg, R.V. y Craig, A.T. (1995). *Introducción a la estadística matemática*. (Edición 5ª). Englewood Hills, Nueva Jersey.
- Horswell, R.L. y Looney, S.W. (1992). Una comparación de pruebas de normalidad multivariante que se basan en medidas de asimetría multivariante y curtosis. *Revista de Computación Estadística y Simulación*, 42 (1-2), 21-38.
- Horswell, R.L. (1990). Una comparación de Monte Carlo de pruebas de normalidad multivariante basada en asimetría multivariante y curtosis (tesis doctoral, Universidad Estatal de Luisiana y Colegio Agrícola y Mecánico).
- Huber, P.J. (1981). *Robust statistics*. New York: Wiley. Johnson, M.E. (1987). *Multivariate statistical simulation*. New York: Wiley.
- Illana, J. I. (2013). *Métodos Monte Carlo*. *Departamento de Física Teórica y del Cosmos, Universidad de Granada*, 26(01).
- Kankainen A, Taskinen S and Oja H (2007). Tests of multinormality based on location vectors and scatter matrices. *Statistical Methods and Applications*, 16(3): 357-379.
- Korkmaz, S., Gökşülük, D., & Zararsiz, G. Ö. K. M. E. N. (2014). MVN: An R package for assessing multivariate normality. *R JOURNAL*, 6(2).
- Koziol, J.A. (1982). Una clase de procedimientos invariantes para evaluar la normalidad multivariada. *Biometrika*, 69 (2), 423-427.
- Koziol, J.A. (1983). Sobre la evaluación de la normalidad multivariante. *Journal of the Royal Statistical Society: Serie B (Metodológica)*, 45 (3), 358-361.
- Koziol, J.A. (1986). Evaluación de la normalidad multivariante: un compendio. *Comunicaciones en Estadística-Teoría y Métodos*, 15 (9), 2763-2783.

- Koziol JA (1989) A note on measures of multivariate kurtosis. *Biom J* 31:619–624
- Looney, S.O. (1995). Cómo utilizar las pruebas de normalidad univariante para evaluar la normalidad multivariante. *El Estadístico Americano*, 49 (1), 64-70.
- Manzotti, A. y Quiroz, AJ (2001). Armónicos esféricos en formas cuadráticas para probar la normalidad multivariada. *Prueba*, 10 (1), 87-104.
- Mardia, K.V. (1970). Medidas de asimetría multivariada y curtosis con aplicaciones. *Biometrika*, 57 (3), 519-530.
- Mardia, K.V. (1980). 9 pruebas de normalidad univariada y multivariada. *Manual de estadísticas*, 1, 279-320.
- Mardia, K.V. y Foster, K. (1983). Pruebas ómnibus de multinormalidad basadas en asimetría y curtosis. *Comunicaciones en Estadística-teoría y métodos*, 12 (2), 207-221.
- Mardia, K. V., & Kent, J. T. (1991). Rao score tests for goodness of fit and independence. *Biometrika*, 78(2), 355-363.
- Maronna, R.A. (1976). Estimadores M robustos de dispersión y ubicación multivariante. *Los anales de las estadísticas*, 51-67.
- Mecklin, C.J. (2000). Una comparación del poder de las pruebas clásicas y más nuevas de normalidad multivariada. Universidad del Norte de Colorado.
- Mecklin, C.J. (2002). El uso de pruebas de equivalencia junto con pruebas de hipótesis estándar y tamaños del efecto.
- Mecklin, C.J. y Mundfrom, D.J. (2000). Comparación del poder de las pruebas clásicas y más nuevas de normalidad multivariada.
- Mecklin, C. J., & Mundfrom, D. J. (2005). A Monte Carlo comparison of the Type I and Type II error rates of tests of multivariate normality. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 75(2), 93-107.
- Montanero Fernández, J. (2008). *Análisis multivariante*.

- Móri TF, Rohatgi VK, and Székely GJ (1993). On multivariate skewness and kurtosis. *Theory of Probability and Its Applications*. 38(3): 547–551.
- Mudholkar, GS, Srivastava, DK y Thomas Lin, C. (1995). Algunas adaptaciones de la variable p de la prueba de normalidad de Shapiro-Wilk. *Comunicaciones en Estadística-Teoría y Métodos*, 24 (4), 953-985.
- Naczk K. (2004). Assessing tests for multivariate normality. MSc Thesis, School of Mathematics and Statistics, Carleton University, Ottawa, Ontario; 2004.
- Paulson, A.S., Roohan, P. y Sullo, P. (1987). Algunas pruebas empíricas de función de distribución para la normalidad multivariante. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 28 (1), 15-30.
- Peña, D. (2002). *Análisis de datos multivariantes (Vol. 24)*. Madrid: McGraw-hill.
- Porras, J.C. (2016). Comparación de pruebas de normalidad multivariada. En *Anales Científicos (Vol. 77, No. 2, pp. 141-146)*. Universidad Nacional Agraria La Molina.
- Pudelko J (2005). On a new affine invariant and consistent test for multivariate normality. *Probability and Mathematical Statistics*, 25(1): 43-54.
- Quiroz, A. J., Manzotti, A., & Pérez, F. J. (1999). A bootstrap procedure for testing the null hypothesis of elliptical symmetry. Preprint.
- Rencher, A. C. (1995). *Methods of multivariate analysis*. John Wiley & Son, Inc. Publication, Canada, 2, 380-407.
- Romeu, J.L. y Ozturk, A. (1993). Un estudio comparativo de las pruebas de bondad de ajuste para la normalidad multivariante. *Revista de análisis multivariante*, 46 (2), 309-334.
- Royston, J.P. (1983a). Algunas técnicas para evaluar la normalidad multivariante basadas en Shapiro-Wilk W . *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)*, 32 (2), 121-133.
- Royston, J.P. (1983b). Un método simple para evaluar la prueba de normalidad W' de Shapiro-Francia. *Diario de la Sociedad Real de Estadística: Serie D (El Estadístico)*, 32 (3), 297-300.

- Royston, P. (1992). Aproximación de la prueba W de Shapiro-Wilk para no normalidad. *Estadística y computación*, 2 (3), 117-119.
- Shapiro SS and Wilk MB (1965). An analysis of variance test for normality (complete samples), *Biometrika*, 52(3/4): 591–611.
- Small, N.J.H. (1980). Marginal Skewness and Kurtosis in Testing Multivariate Normality. *Applied Statistics*, Vol. 29, Issue 1, 85-87.
- Singh, A. (1993). Omnibus robust procedures for assessment of multivariate normality and detection of multivariate outliers. In G.P. Patil and C.R. Rao (Eds.), *Multivariate Environmental Statistics* (pp.445-488). Amsterdam: North-Holland.
- Srivastava, M. S. (1984). A measure of skewness and kurtosis and a graphical method for assessing multivariate normality. *Statistics & Probability Letters*, 2(5), 263-267.
- Székely, G. J., & Rizzo, M. L. (2005). A new test for multivariate normality. *Journal of Multivariate Analysis*, 93(1), 58-80.
- Tukey, J. W. (1960). A survey of sampling from contaminated distributions. In S. G. I. Olkin (Ed.), *Contribution to Probability and Statistics* (pp. 448-485). Stanford: Stanford University Press.
- Villasenor Alva JA, González Estrada E (2009) A generalization of Shapiro-Wilk's test for multivariate normality. *Commun Stat Theory Methods* 38:1870–1883.
- Volkmer H (2014) A characterization of the normal distribution. *J Stat Theory Appl* 13:83–85.
- Ward, P.J. (1988). Goodness-of-fit tests for multivariate normality. Unpublished doctoral dissertation, University of Alabama.
- Young, D.M., Seaman, S.L., & Seaman, J.W. (1995). A comparison of six test statistics for detecting multivariate nonnormality which utilize the multivariate square dradii statistic. *The Texas Journal of Science*, 47, 21-38.
- Zumaqué Ballesteros, A. E. (2021). Background sobre el estudio de potencia y

sensibilidad para dieciséis pruebas de normalidad a diferentes niveles de
No normalidad.