UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SANTA

ESCUELA DE POSGRADO

PROGRAMA DE DOCTORADO EN MATEMÁTICA

“Existencia de Soluciones de un Sistema Eliptico Acoplado No Lineal"

Tesis para optar el grado de
Doctor en Matemática

Autor:

Mg. Quique Broncano, José Simeón

Asesor:

Dr. Cortez Gutiérrez, Milton Milcíades
DNI N°. 18162818
Código, ORCID: 0000-0003-4939-7734

Línea de Investigación
Ecuaciones diferenciales y análisis numérico

Nuevo Chimbote - PERÚ
2023

UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

CONSTANCIA DE ASESORAMIENTO DE TESIS

Yo, Dr. Milton Milciades Cortez Gutiérrez, mediante la presente certifico mi asesoramiento de la Tesis Doctoral titulada: "Existencia de Soluciones de un Sistema Eliptico Acoplado No Lineal", elaborado por el magister José Simeón Quique Broncano para obtener el Grado Académico de Doctor en Matemática en la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Santa.

Nuevo Chimbote, febrero del 2023

....

Dr. Milton Milciades Cortez Gutiérrez

ASESOR

CODIGO ORCID: 0000-0003-4939-7734

DNI N° 18162818

UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

CONFORMIDAD DEL JURADO EVALUADOR

"EXISTENCIA DE SOLUCIONES DE UN
SISTEMA ELIPTICO ACOPLADO NO LINEAL"

TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE DOCTOR EN MATEMÁTICA

Revisado y Aprobado por el Jurado Evaluador:

....

Dr. Fidel Alejandro Vera Obeso
PRESIDENTE
CODIGO ORCID: 0000-0002-9125-0464
DNI N° 32857547

....

Dr. Teodoro Moore Flores
SECRETARIO
CODIGO ORCID: 0000-0002-1755-3459
DNI N° 32763522

....

Dr. Milton Milciades Cortez Gutiérrez
VOCAL
CODIGO ORCID: 0000-0003-4939-7734
DNI N° 18162818

UNS
ESCUELA DE POSGRADO

ACTA DE EVALUACIÓN DE SUSTENTACIÓN DE TESIS

A los diecisiete días del mes de febrero del año 2023, siendo las 11:00 horas, en el aula multimedia N° 01 de la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Santa, se reunieron los miembros del Jurado Evaluador, designados mediante Resolución Directoral N° 668-2022-EPG-UNS de fecha 22 de diciembre de 2022, conformado por los docentes: Dr. Fidel Alejandro Vera Obeso (Presidente), Dr. Teodoro Moore Flores (Secretario) y Dr. Milton Milciades Cortez Gutiérrez (Vocal), con la finalidad de evaluar la tesis titulada: ***EXISTENCIA DE SOLUCIONES DE UN SISTEMA ELIPTICO ACOPLADO NO LINEAL;*** presentado por el tesista **José Simeón Quique Broncano**, egresado del programa de **Doctorado en Matemática**.

Sustentación autorizada mediante Resolución Directoral N° 034-2023-EPG-UNS de fecha 13 de febrero de 2023.

El presidente del jurado autorizó el inicio del acto académico; producido y concluido el acto de sustentación de tesis, los miembros del jurado procedieron a la evaluación respectiva, haciendo una serie de preguntas y recomendaciones al tesista, quien dio respuestas a las interrogantes y observaciones.

El jurado después de deliberar sobre aspectos relacionados con el trabajo, contenido y sustentación del mismo y con las sugerencias pertinentes, declara la sustentación como: APROBADA asignándole la calificación de: DIECINUEVE

Siendo las 11:30 horas del mismo día se da por finalizado el acto académico, firmando la presente acta en señal de conformidad.

Dr. Fidel Alejandro Vera Obeso
Presidente

Dr. Teodoro Moore Flores
Secretario

Dr. Milton Milciades Cortez Gutiérrez
Vocal

Recibo digital

Este recibo confirma quesu trabajo ha sido recibido por Turnitin. A continuación podrá ver la información del recibo con respecto a su entrega.

La primera página de tus entregas se muestra abajo.

Autor de la entrega:	José Simeón Quique Broncano
Título del ejercicio:	Tesis.
Título de la entrega:	EXISTENCIA DE SOLUCIONES DE UN SISTEMA ELIPTICO ACOP...
Nombre del archivo:	TESIS_Quique_Broncano_Abril_2022_.docx
Tamaño del archivo:	94K
Total páginas:	37
Total de palabras:	6,398
Total de caracteres:	34,140
Fecha de entrega:	23-feb.-2023 10:54p. m. (UTC-0500)
Identificador de la entre...	2021772547

"EXISTENCIA DE SOLUCIONES DE UN SISTEMA ELIPTICO ACOPLADO NO LINEAL"

Autor:
Mg. JOSE SIMEON QUIQUE BRONCANO

EXISTENCIA DE SOLUCIONES DE UN SISTEMA ELIPTICO ACOPLADO NO LINEAL

INFORME DE ORIGINALIDAD

16%	14%	3%	5%
INDICE DE SIMILITUD	FUENTES DE INTERNET	PUBLICACIONES	TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1	repositorio.uns.edu.pe Fuente de Internet	5%
2	1library.co Fuente de Internet	1%
3	biblioteca.uns.edu.pe Fuente de Internet	1%
4	Submitted to Universidad Alas Peruanas Trabajo del estudiante	1%
5	repositorio.unac.edu.pe Fuente de Internet	<1%
6	Submitted to Universidad Nacional del Santa Trabajo del estudiante	<1%
7	waseda.repo.nii.ac.jp Fuente de Internet	<1%
8	docslide.us Fuente de Internet	<1%
9	pure.rug.nl Fuente de Internet	

DEDICATORIA

A la memoria de mi madre **Rosa Victoria Broncano Evangelio**, que con su bendición y sabiduría me orientó en cada etapa de mi vida; así como con su ejemplo y amor me inculcó valores los mismos que rigen mi accionar.

A mis hermanas **Rosa María, Zoila Elisa** y **Julia Herlinda Quique Broncano** quienes me acompañan y brindan su apoyo en cada decisión adoptada, con su ejemplo de constancia y respeto me motivan a cumplir las metas trazadas.

Indice General

MARCO TEÓRICO

Resumen

En el presente trabajo de Investigación se demuestra la existencia de solución de un sistema acoplado no lineal en espacios de Sobolev, mas precisamente dicho sistema involucra ecuaciones diferenciales parciales del tipo elíptico no lineal:

$$\Delta^2 u - \sqrt{\lambda_1}\Delta u + \lambda_1 u = \mu_1 u^3 + \alpha f(u,v)$$
$$\Delta^2 v - \sqrt{\lambda_1}\Delta v + \lambda_1 v = \mu_1 v^3 + \alpha g(u,v)$$

Donde, f y g son funciones de las variables u y v que pertenecen a ciertos espacios de Sobolev. Para tal se hace uso de las técnicas del análisis funcional y lo que origina su relación con la teoría de optimización.

Palabras claves: Existencia de solución Sistema acoplado elíptico no lineal.

Abstract

In the present work of research one shows the existence of solution of a non linear coupled system in Sobolev, more precisely such systems involve non linear partial differential equations of type elliptic .

$$\Delta^2 u - \sqrt{\lambda_1}\Delta u + \lambda_1 u = \mu_1 u^3 + \alpha f(u,v)$$
$$\Delta^2 v - \sqrt{\lambda_1}\Delta v + \lambda_1 v = \mu_1 v^3 + \alpha g(u,v)$$

Where f and g are functions of the variables u and v that lie in certain Sobolev spaces. For that, one makes use of the technical of the functional Analysis and that arise its relation with the optimization theory.

Keywords: Existence of solution, non linear coupled system.

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo de Investigación intitulado "**EXISTENCIA DE SOLUCIONES DE UN SISTEMA ELIPTICO ACOPLADO NO LINEAL"** se trata de estudiar la existencia de solución de un sistema acoplado no lineal mediante la teoría de minimización de funcionales, para tal se hizo un estudio de los espacios $L^p(\Omega),\ 1 < \mathrm{p} \leq \infty$, así como también los espacios de Sobolev $H^m(\Omega)$ y sus respectivas propiedades.

El avance de la ciencia y con ella la tecnología de punta, requieren modelos matemáticos que faciliten la solución ya sea analítica o numérica de ecuaciones diferenciales parciales no lineales.

Es en esta dirección que se procederá a realizar la búsqueda para la demostración de existencia de solución, que en este caso se trata para las ecuaciones de sistemas elípticos acoplados no lineales. Para el caso de existencia de soluciones múltiples de problemas casi lineales del tipo elíptico se encuentra en los trabajos de,Binding, P.A., Drabek, P. & Y.X. Huang(2000), por otro lado los sistemas elípticos acoplados no lineales aparecen en óptica no lineal tal como se aprecia en Akhmediev,N. ,Ankiewicz,A.(2008).

En el presente trabajo de investigación se enfocará al siguiente sistema elíptico acoplado no lineal:

$$\Delta^2 u - \sqrt{\lambda_1}\Delta u + \lambda_1 u = \mu_1 u^3 + \alpha f(u,v)$$
$$\Delta^2 v - \sqrt{\lambda_1}\Delta v + \lambda_1 v = \mu_1 v^3 + \alpha g(u,v)$$

Donde, f y g son funciones de las variables u y v que pertenecen a ciertos espacios de Sobolev.

Por otro lado en el Capítulo I, se trata del problema de investigación, es decir su planteamiento así como su formulación. Ya en el Capítulo II, se desarrolla el Marco Teórico del trabajo, en el cual se fundamenta el aspecto teórico de la investigación junto con su Marco Conceptual.

Así mismo, en el Capítulo III, se trata del Marco Metodológico, la cual se hace uso de las técnicas e instrumentos de la investigación, por lo que se desarrolla secuencialmente las etapas elaborando en forma deductiva las implicancias de las hipótesis consideradas.

Cabe resaltar que la ciencia usa herramientas matemáticas que facilitan la existencia de solución para problemas que modelan las ecuaciones diferenciales parciales. Para el trabajo de Investigación en mención se asocia un sistema acoplado a una ecuación diferencial parcial del tipo elíptica. De modo que se rige de un procedimiento de cálculo formal mediante la minimización de funcionales del cual se hace uso del teorema de pasa montaña.

En el Capítulo IV, se realiza el desarrollo de los resultados y discusión del trabajo de investigación, obtenido por el método de pasa montaña, en el Capítulo III.

Finalmente, el Capítulo V, se logra obtener las conclusiones de los resultados principales obtenidos en el capítulo anterior, además se brinda algunas sugerencias del trabajo de investigación para futuros estudios posteriores.

CAPÍTULO I

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 Planteamiento y fundamentación del problema de investigación

El área de Ecuaciones diferenciales parciales no lineales ha tenido un intenso estudio a mediados del siglo XIX, con aplicaciones a la dinámica de fluídos, elasticidad no lineal, difusión, mecánica quántica, electrostática, etc., y todos ellos se caracterizan por pertenecer a un cierto tipo de ecuaciones como son elípticos, parabólicos e hiperbólicos o como también las semi-lineales y combinación de los tipos de ecuaciones. Por otro lado, el crecimiento incesante de la ciencia, motivó el estudio de sistemas de ecuaciones no lineales acopladas, con diferentes operadores, Van Waarde, Trentelman Camlibel, (2017). Más aún algunos autores usan la teoría de optimización, Clarke. (1990). Hoy en día se estudia el aspecto cualitativo de dichos sistemas con diferentes tipos de solución, debido a que se construyó la teoría de distribuciones de Laurent Schwartz por los años 1940, de modo que motivó la construcción de nuevos espacios funcionales, tal como viene estudiándose firmemente los espacios de Sobolev. El presente trabajo de investigación está relacionado con un sistema de ecuaciones elípticas acoplados no lineales, de la forma:

$$\begin{cases} \Delta^2 u - \sqrt{\lambda_1}\Delta u + \lambda_1 u = \mu_1 u^3 + \alpha u v^2 \\ \\ \Delta^2 v - \sqrt{\lambda_1}\Delta v + \lambda_1 v = \mu_1 v^3 + \alpha v u^2 \end{cases} \qquad (1.1)$$

Donde, inicialmente $(u, v) \in H \times H$. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,un conjunto abierto bien regular de $\mathbb{R}^n$, λ_i , μ_i , $i = 1,2$ son números reales positivos, α es un parámetro real, y H un ciert espacio de Hilbert convenientemente escogido.

El sistema (1.1) aparece como producto de un estudio en óptica no lineal tal como se aprecia en Akhmediev Ankiewicz (2008).

Se tratará de demostrar la existencia de soluciones en un subconjunto de los espacios $H \times H$.

1.2. Antecedentes de la investigación

En relación al tema de sistema elípticos acoplados no lineales, ya existen trabajos recientemente introducidos en la literatura especializada como puede verse en Ambrosetti y Colorado. (2006), Zhijie Chen, Wenming Zou (2014), Dancer, Wei, y Weth (2015). Por otro lado también se puede aplicar la teoría de semigrupos, para tales modelos, tal como se puede ver su aplicación en Pazy (1983) así mismo también existen artículos publicados usando el método de pasa montaña, siguiendo la teoría dado en Pucci (1984).

1.3. Formulación del problema de investigación

En el presente proyecto de investigación se abordará el estudio dando respuesta a la interrogante ¿Existe solución de un sistema elíptico acoplado no lineal? Más precisamente para el sistema elíptico acoplado no lineal:

$$\begin{cases} \Delta^2 u - \sqrt{\lambda_1}\Delta u + \lambda_1 u = \mu_1 u^3 + \alpha u v^2 \\ \\ \Delta^2 v - \sqrt{\lambda_1}\Delta v + \lambda_1 v = \mu_1 v^3 + \alpha v u^2 \end{cases}$$

1.4. Delimitación del estudio

El estudio del presente trabajo de Tesis está delimitado básicamente al estudio de minimización de funcionales sobre una variedad inmerso en un subconjunto de un espacio de Sobolev, Adams (1975). El presente trabajo de investigación, solo trata del estudio de la existencia de solución para el problema planteado (1.1).

1.5. Justificación e importancia de la investigación

La presente investigación se justifica porque su importancia está basada en los problemas de la ciencia e ingeniería, precisamente modelos gobernados por ecuaciones diferenciales parciales no lineales, tal como se aprecia en Evans (1998). En lo que respecta a estos modelos se tiene como estudio al sistema elíptico acoplado no lineal:

$$\begin{cases} \Delta^2 u - \sqrt{\lambda_1}\Delta u + \lambda_1 u = \mu_1 u^3 + \alpha u v^2 \\ \\ \Delta^2 v - \sqrt{\lambda_1}\Delta v + \lambda_1 v = \mu_1 v^3 + \alpha v u^2 \end{cases}$$

Tales modelos en general tiene sus complicaciones en cuanto a los espacios funcionales que se puedan demostrar la existencia de solución, ya en investigaciones recientes, existen resultados de existencia de soluciones, tratados por diversos autores para los casos escalares o en determinados casos particulares para las funciones $f\ y\ g$. Motivando de esta manera un análisis minucioso del caso planteado, el cual permitirá posteriores estudios en esa línea de investigación para futuros trabajos o investigaciones. La importancia del estudio radica en encontrar un teorema o método que permita resolver un problema escalar o vectorial, cuando aparece un operador diferencial de alto orden en su estructura, motivando así la ampliación del conocimiento en la ciencia matemática.

1.6. Formulación de los Objetivos de la investigación:

1.6.1. Objetivo General

Estudiar la existencia de solución de un sistema acoplado no lineal mediante una técnica de minimización de funcionales, restringidas a un subconjunto de un espacio de Hilbert, Brezis (1983) la que se adjuntará a dicho sistema de modo que verifique ciertas propiedades y de esta manera pueda garantizar candidatos a un extremo.

1.6.2. Objetivos Específicos

• Determinar la existencia de solución para un sistema elíptico acoplado no lineal dada en (1.1).

• Desarrollar el método pasa montaña para el sistema (1.1).

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1 Fundamentos teóricos de la investigación

El sistema elíptico acoplado no lineal (1.1) tiene su estudio de modo general en un estudio en óptica no lineal tal como se aprecia en Akhmediev, Ankiewicz,(2008), para estos temas usaron el análisis funcional no lineal, Zeidler Eberhard, (1990) .

En el presente trabajo de investigación, emplearemos el siguiente marco teórico

a) Análisis Funcional no lineal.
b) Espacios de Sobolev.
c) Teoremas de inmersión y compacidad en espacios de Sobolev.
d) Teoría del punto crítico y de minimización de funcionales.
e) Diferencial de Gateaux.
f) El teorema de pasa montaña.

En los cuales se precisarán de manera adecuada los resultados que permitan resolver el problema planteado. También se considerarán algunos preliminares originales que puedan sustentar las hipótesis a plantear en el estudio del sistema elíptico acoplado no lineal.

2.2 Marco Conceptual

2.2.1 Espacios de Hilbert

Definición 1.- Sea H un espacio vectorial sobre el campo de los reales provisto de un producto interno (.,.). H es un espacio de Hilbert si la norma inducida por el producto interno es un espacio normado completo. Es decir para toda sucesión de Cauchy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en H converge en la norma para un elemento de H.

2.2.2 Espacios $\mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}\ (\boldsymbol{\Omega})\,,\mathbf{1} < \boldsymbol{p} \leq \infty$

Definición 2.- Se define el espacio $L^p(\Omega)$ como las funciones medibles

$u: \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $|u(x)|^p$ es integrable, es decir:

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx < \infty$$

En particular en $L^2(\Omega)$ provisto de la norma

$$|u| = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

es un espacio de Hilbert.

2.2.3 Espacios $\mathbf{L}^{\infty}$ $(\boldsymbol{\Omega})$

Definición 3.- El espacio $L^{\infty}(\Omega)$ consiste de las funciones medibles esencialmente acotadas $u: \Omega \to \mathbb{R}$ con la norma

$$\|u\| = \sup \underset{\Omega}{\operatorname{ess}} |u|$$

2.2.4 Distribuciones

Definición 4.- Se dice que el funcional $\boldsymbol{T}: C_0^{\infty}(\Omega) \to \mathbb{R}$ es una distribución si satisface las siguientes condiciones:

i) **T** es lineal en $C_0^{\infty}(\Omega)$

ii) **T** es continuo en $C_0^{\infty}(\Omega)$

Donde $C_0^{\infty}(\Omega)$ es el espacio de las funciones infinitamente diferenciables y que tienen su soporte compacto en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Al conjunto de las distribuciones se le denota por $\mathcal{D}'(\Omega)$

<u>**Ejemplo 1:**</u> Dada la función impulso unitario en el punto a, definido por $\boldsymbol{\delta_a}: C_0^{\infty}(\Omega) \to \mathbb{R}$ como:

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$$

Evidentemente es una distribución sobre $C_0^{\infty}(\Omega)$, es decir satisface las condiciones (i) y (ii) de la Definición 4.

Definición 5.- Se dice que la distribución $\boldsymbol{T}: C_0^{\infty}(\Omega) \to \mathbb{R}$ tiene una derivada distribucional si

$$\langle \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial x_i}, \varphi \rangle = -\langle \boldsymbol{T}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle \quad , \qquad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$$

Lema 2.1 (Lema de Dubois Raymond)

La aplicación $\mathcal{T}: L^p(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ es inyectiva . Es decir

$$\mathcal{T}u = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = 0$$

Demostración

Ver Medeiros,L.(1977).

<u>**Ejemplo 2:**</u> Dada la función escalón unitario

$$\boldsymbol{f}(x) = H_a(x) = \begin{cases} 1\,, si\ x \geq a \\ 0\,,\ \ si\ x < a \end{cases}\ ,\quad a \geq 0$$

Su derivada distribucional es la distribución delta de Dirac en el punto a, es decir

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i} = \delta_a$$

En efecto, para $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ se tiene

$$\langle \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i}, \varphi \rangle = -\langle \boldsymbol{f}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f} \frac{d\varphi}{dx}\, dx = -\int_{\boldsymbol{a}}^{+\infty} \frac{d\varphi}{dx}\, dx = \varphi(a) = \langle \delta_a, \varphi \rangle$$

Por lo tanto del Lema de Dubois Raymond se deduce que

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i} = \delta_a$$

2.2.5 Espacios de Sobolev $\boldsymbol{H^m}(\boldsymbol{\Omega})$

Definición 6.- Se define el espacio de Sobolev de orden m y se representa por $H^m(\Omega)$ como el espacio de las funciones $u \in L^2(\Omega)$ tales que todas las derivadas distribucionales $D^\alpha u$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ de orden $|\alpha| \leq m$, pertenecen a $L^2(\Omega)$. $H^m(\Omega)$ con el producto interno

$$\big((u, v)\big) = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)$$

, donde $(,)$ denota el producto interno en $L^2(\Omega)$, es un espacio de Hilbert.

Note que, el espacio $H_0^m(\Omega)$ se define como la aderencia de $C_0^\infty(\Omega)$ en la norma de $H^m(\Omega)$, además se acostumbra considerar la norma en $H_0^m(\Omega)$ por:

$$\|u\| = \left(\sum_{|\alpha|=m} |D^{\alpha}u|^2 \right)^{1/2}$$

Donde, $|.|$ denota la norma en $L^2(\Omega)$.

Definición 8.- El espacio $H^m(\Omega) \subset L^r(\Omega)$, $1 \leq r < \frac{2n}{n-2m}$, ,con inmersión compacta ,es decir, satisface las siguientes condiciones:

i) $|u|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|_{H^m(\Omega)}$, $u \in H^m(\Omega)$

ii) Toda sucesión acotada $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $H^m(\Omega)$, se puede extraer una subsucesión $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge fuerte en $L^r(\Omega)$.

Y se le denota por $H^m(\Omega) \hookrightarrow^c L^r(\Omega)$

2.2.6 Diferencial de Gâteaux

Sea X un espacio normado y Ω un conjunto abierto no vacío de X, considere $J : \Omega \subseteq X \to \mathbb{R}$ una función real. Fijado un vector no nulo $h \in X$ y $u_0 \in \Omega$, como Ω es un conjunto abierto existe un $\delta > 0$ tal que si $|t| < \delta$, entonces $u_0 + th \in \Omega$. Por lo tanto, si además $t \neq 0$ tiene sentido escribir:

$$\frac{J(u_0 + th) - J(u_0)}{t}$$

Definición 10.- Se define la derivada de Gâteaux de J en la dirección $h \in X$ en el punto $u_0 \in \Omega$. Si existe y es finito el siguiente límite:

$$\lim_{t\to 0} \frac{J(u_0 + th) - J(u_0)}{t}$$

Como el límite de una función si existe es único, entonces una función puede tener a lo sumo una derivada de Gâteaux en el punto u_0 y en la dirección $h \in X$, dicho límite se le denota por $\delta J(u_0, h)$ conocido también por variación de Gâteaux de J en el punto u_0 y en la dirección $h \in X$ .La variación de Gâteaux es una operación lineal en el siguiente sentido:

Sean J_1 y J_2 dos funciones con variación de Gâteaux en el punto u_0 y en la dirección $h \in X$, entonces $\delta(aJ_1 + bJ_2)(u_0, h) = a\delta J_1(u_0, h) + b\delta J_2(u_0, h)$

Es natural convenir que $\delta J(u_0, 0) = 0$.

Por otro lado si la aplicación

$$\delta J(u_0,.) \ : h \in X \to \delta J(u_0,h) \in \mathbb{R}$$

es lineal y continua, equivalentemente pertenece al dual topológico de X, se dice que J es diferenciable en el sentido de Gâteaux en u_0 y que se le denota por: $J'(u_0): X \to \mathbb{R}$ tal que $J'(u)(h) = \delta J(u_0,h)$.

Definición 11.- Sea X un espacio normado y sea $J : \Omega \subseteq X \to \mathbb{R}$ una función real con dominio el conjunto abierto Ω. Se dice que J tiene un mínimo local (máximo local) en $x_0 \in \Omega$, si existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in B(x_0,\delta) \subseteq \Omega$ se tiene

$$J(x) \geq J(x_0) \quad (J(x) \leq J(x_0))$$

Propiedades

G1. Si la función $J : \Omega \to \mathbb{R}$ tiene un extremo local en $u_0 \in \Omega$, y además J tiene variación de Gâteaux en u_0, entonces $\delta J(u_0,h) = 0$, para todo $h \in X$.

G2.Sea un funcional convexo (esto implicará que es convexo sobre los subconjuntos convexos de Ω) $J : \Omega \to \mathbb{R}$, si existe $u_0 \in \Omega$ tal que $\delta J(u_0,h) = 0$, para todo $h \in X$. Entonces u_0 es un mínimo local de J en.

Definición 12.- Sea $J : \Omega \to \mathbb{R}$ un funcional de forma que tiene variación de Gâteaux en cualquier punto de Ω. Dado $u_0 \in \Omega$ y dado $h \in X \setminus \{0\}$ se llama variación de Gâteaux segunda en el punto u_0 y en la dirección h al valor del siguiente límite siempre que exista:

$$\delta^2 J(u_0,h) = \lim_{t\to 0} \frac{\delta J(u_0 + th, h) - \delta J(u_0, h)}{t}$$

Teorema 2.1 .-Sea $J : \Omega \to \mathbb{R}$ un funcional. El funcional J tiene en $u_0 \in \Omega$ un mínimo local siempre que:

1) $\delta J(u_0,h) = 0$ para cada $h \in X$.
2) $\forall h \in X, \exists\ \delta^2 J(u,h)$ en un entorno de u_0 y además existe una constante positiva c tal que $\delta^2 J(u_0,h) \geq c\|h\|^2$, $\forall h \in X$.
3) Dado $\varepsilon > 0$ existe $\mu > 0$ (dependiendo de ε) tal que $|\delta^2 J(u,h) - \delta^2 J(u_0,h)| \leq \varepsilon\|h\|^2$ para todo $u,h \in X$ con $\|u - u_0\| \leq \mu$.

2.2.7 Variedad regular

Sea M una variedad topológica n -dimensional. Si (U,φ) y (V,ψ) son dos cartas tal que $U \cap V \neq \phi$, la aplicación composición de homomorfismos $\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ se denomina cambio de coordenadas. Tales cartas son regularmente compatibles si $U \cap V = \phi$ o el cambio de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1}$ es un difeomorfismo C^{∞}. Puesto que $\varphi(U \cap V\ )$ y $\psi(U \cap V)$ son subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, la regularidad de este cambio de coordenadas es interpretado en el sentido ordinario de tener derivadas parciales continuas de todas las ordenes. Se define un atlas para M como la colección de cartas cuyos dominios cubren M.

Definición 13.- Un atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ para una variedad topológica es llamada de regular(smooth) cuando todos los cambios de coordenadas

$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}|_{\varphi_i(U_{ij})}: \varphi_i(U_{ij}) \to \varphi_j(U_{ij})\ ,\ U_{ij} = U_i \cap U_j$

Son aplicaciones regulares, es decir son difeomorfismos que pertenecen a $C^{\infty}(\varphi_i(U_{ij}), \mathbb{R}^n)$.

Note que para esto se necesita demostrar que son inyectivas con Jacobianos no singular en cada punto.

Además, dos atlas $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son equivalentes, si la unión $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ es una atlas regular.

Un atlas regular $\mathcal{A}$ en M es maximal si no está propiamente contenido en cualquier otro atlas mayor lo cual forma un atlas completo.

Definición 14.- Una variedad regular es una variedad topológica provisto de una clase de equivalencia de atlas regulares, según la **Definición 13**.

2.2.8. Espacio tangente a una variedad regular

Sea M una variedad regular de dimensión n, y $p \in M$. Suponga que $\mathcal{A}$ es un atlas regular para M.

Definición 15.- El espacio tangente de M en p es el conjunto T_pM de todos los pares (a, φ) ,tales que $a \in \mathbb{R}^n$ y $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ es una carta local en una vecindad del punto p, y al considerar su conjunto cociente mediante la relación de equivalencia $(a, \varphi) \sim (b, \psi)$ si y solamente si $d(\psi \circ \varphi^{-1})_{\phi(p)}(a) = b$. Por lo tanto de la regla de la cadena en $\mathbb{R}^n$, se ve que es una relación de equivalencia, y se denota la clase de equivalencia de (a, φ) por $[a, \varphi]$. Cada clase de equivalencia se denomina vector tangente en p. Fijada una carta local (U, φ) en la vecindad del punto p, la aplicación $a \in \mathbb{R}^n \to [a, \varphi] \in T_pM$ es una biyección, y de la linealidad de $d(\psi \circ \varphi^{-1})_{\phi(p)}$ resulta que se puede usar la estructura de espacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ a T_pM. Note que $dim\, T_pM = dim\, M$.

Vectores Tangentes como derivadas direccionales

Definición 16.- Sean M una variedad regular, y $p \in M$. Para cada vector tangente $v \in T_pM$ de la forma $v = [a, \varphi]$, donde $a \in \mathbb{R}^n$ y (U, φ) es una carta local de M, y para cada $f \in C^\infty(U)$, se define la derivada direccional de f en la dirección de v como el número real

$$v(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p) + ta)\Big|_{t=0} = d(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}(a).$$

Una consecuencia de la regla de la cadena es que esta definición no depende de la carta local escogida para su representación de v.

2.2.9. Forma bilineal

Definición 17:

1) Una forma bilineal en $V \times V$ es una aplicación $a: V \times V \to \mathbb{R}^+$,
que es lineal en cada una de las variables de $(u, v) \in V \times V$

2) Es continua, si existe una constante positiva C tal que

   $|a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|$, para todo (u, v) en $V \times V$

3) Es simétrica, si se verifica

   $a(u,v) = a(v,u)$, para todo (u, v) en $V \times V$

4) Es coerciva (V-elíptica) en V, si existe una constante positiva α, tal que

$$a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2 \ , \forall v \in V$$

2.2.10.Formulación Variacional

Definición 18.- Dada una forma bilineal $a: V \times V \to \mathbb{R}^+$, y un funcional lineal continuo $f: H \to \mathbb{R}$, con $V \subset H$ (imersión contínua) Consecuentemente el problema variacional consiste en encontrar una única función

$u \in V$, tal que $a(u, v) = (f, v)$, $\forall\ v \in V$

Que será equivalente a minimizar el siguiente funcional cuadrático:

$$J(v) = \tfrac{1}{2}\ a(v, v)\ -\ (f, v)$$

definido en V. En efecto, sea $u \in V$ la solución del problema variacional y considere cualquier vector w de V. Consecuentemente la suma $v = u + w$ es cualquier vector de V y satisface:

$$J(u\ +\ w, u\ +\ w)\ =\ \frac{1}{2} a(u\ +\ w, u\ +\ w)\ -\ (f, u\ +\ w)$$

Desarrollando los productos internos se tiene:

$$J(u\ +\ w, u\ +\ w) = \frac{a(u,u)}{2} - (f, u) + \frac{a(u,w)}{2} - (f, w) + \frac{a(w,u)}{2} +$$

$$+\ \frac{1}{2}\ a(w, w)$$

De la simetría de la forma bilineal y del hecho de que u es solución, se obtiene

$$\tfrac{1}{2}\ a(u, w)\ -\ (f, w)\ +\ \tfrac{1}{2}\ a(w, u)\ =\ 0$$

Por lo tanto resulta

$$J(u\ +\ w, u\ +\ w) =\ J(u, u) + \tfrac{a(w,w)}{2}\ \geq\ J(u, u) + \alpha_2 \|v\|^2\ \ \geq\ J(u, u)$$

Luego, $J(v, v) \geq J(u, u)$ para todo $v \in V$, demostrando que $J(v, v)$ asume su mínimo en $u \in V$. Como aplicación directa se tiene el siguiente problema de Dirichlet homogéneo:

Considere $V\ =\ H_0^1(\Omega)$ y $H\ =\ L^2(\Omega)$ la forma bilineal definida por

$$a(u, v)\ =\ \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}\ dx + \int_{\Omega} b_0\, uv dx$$

Donde $a(u, v)$ satisface la siguiente desigualdad

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x)\ y_i y_j \ \geq\ C\|y\|^{\ 2}$$

Para todo $x\ \in\ \overline{\Omega}\,,\ y\ \in\ \mathbb{R}^n\ ,\ b_0(x) \geq\ 0$,para todo $x\ \in\ \overline{\Omega}\,,$

$f\ \in\ L^2(\Omega)$. Naturalmente $a(u, v)$ es una forma bilineal contínua, coerciva y simétrica en V. Luego existe un único $u \in\ H_0^1(\Omega)$, tal que

$$a(u, v) = (f, v)\ ,\ \forall\ v \in V$$

Es decir

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} b_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}\ dx + \int_{\Omega} b_0\, uvdx = \int_{\Omega} f\, vdx\ \ ,\forall\ \mathrm{v}\ \in\ \mathrm{V}$$

Se sabe que para las funciones $v\ \in\ C_0^{\infty}(\Omega)$, la primera integral del lado izquierdo, haciendo uso de una integración por partes se consigue

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(b_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) v\ \ dx + \int_{\Omega} b_0\, uvdx = \int_{\Omega} f\, vdx\ \ ,\forall\ \mathrm{v}\ \in\ C_0^{\infty}(\Omega)$$

Finalmente del Lema de Dubois Raymond, se consigue

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(b_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + b_0 u = f$$

Esta igualdad se entiende en el sentido de las distribuciones. Observe que cuando los coeficientes $b_{ij}\ =\ 0\ , i\ \neq\ j\ , b_{ii} =\ 1$, se tiene el operador Laplaciano:

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} + b_0 u = f$$

Por lo tanto, de los argumentos dados para la formulación variacional, y en lo que respecta a los funcionales involucrados, nos permite introducir la noción de variedad de Nehari

Definición 19.- Sea J el funcional asociado con una ecuación diferencial parcial, evidentemente todos los puntos críticos de J están en la variedad:

$$\{u: < J'(u), u >= 0\}$$

El cual es conocida como la **variedad de Nehari**.(vea Nehari,Z. (1960)).

2.2.13 Convergencia débil y fuerte en un espacio de Hilbert

Definición 20.- Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio de Hilbert H. Se dice que la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débil para una función u en H si

$$(u_n, v) \longrightarrow (u, v) \quad , \quad \forall \ v \ \in H$$

Donde $(.,.)$ es el producto interno en H. También se le denota por

$$u_n \rightharpoonup u \ , \qquad \text{débil en } H \quad , \text{n} \longrightarrow \infty$$

Definición 21.- Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio de Hilbert H. Se dice que la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fuerte para una función u en H si

$$\|u_n - u\| \longrightarrow \mathbf{0} \quad , \qquad \text{cuando n} \longrightarrow \infty$$

Donde $\|.\|$ es la norma inducida por el producto interno en H. También se le denota por

$$u_n \longrightarrow u \ , \text{fuerte en } H$$

Por otro lado el sistema elíptico acoplado no lineal se tratará de reescribir en su forma variacional, es decir escribiendo como un funcional de la forma

$$\Phi(u, v) = \int_{\Omega} F(u, v)dx$$

Y estudiar el problema de minimización

$$\min\{\Phi(u, v) : \ (u, v) \in H \times H\backslash\{(0,0)\}, \Phi'(u, v) = 0\}$$

2.2.12. Extensión del Teorema pasa montaña

Sea H un espacio de Hilbert, $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$, $e \in X$ y $r > 0$ tal que $\|e\| > r$. Considere las constantes

$$c_0 = \inf_{\|u\|=r} \Phi(u) \quad , c_1 = \max\{\Phi(0), \Phi(e)\} \quad , c = \inf_{\gamma\epsilon\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \Phi(\gamma(t))$$

Donde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X): \gamma(0) = 0 \,, \gamma(1) = e \}.$$

A continuación se enuncia una extensión del Teorema de pasa montaña de Ambrosetti-Rabinowitz (1973).

Teorema 2.2 .-(Extensión del teorema de pasa montaña) Sea H un espacio de Hilbert, $\Phi \in C^1(X,\mathbb{R})$, suponga que existe un $e \in H$, dos números reales $\alpha > 0$ y $r > 0$ tal que $\|e\| > r$ y se verifique las siguientes condiciones:

(i) $c_0 = \inf_{\|u\|= r} \Phi(u) \geq c_1$, $\Phi(u) > 0$ en $\{u \in X, \|u\| < r\} \setminus \{0\}$

(ii) (Condición de Palais Smale) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $0 < \Phi(u_n)$, $\Phi(u_n)$ acotado superiormente, y $\Phi'(u_n) \to 0$, entonces $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite una subsucesión convergente. Entonces, c es un valor crítico de Φ.

CAPÍTULO III

MARCO METODOLÓGICO

En este capítulo se describe la metodología utilizada en las diferentes etapas del estudio y los instrumentos de recolección de datos utilizados. Inicialmente se define los espacios de Sobolev $V = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, Ω un subconjunto abierto bien regular de $\mathbb{R}^3$, con un producto interno escogido convenientemente.

Para la ecuación de Laplace se observa que buscar soluciones explícitas, es muy frecuente restringir a una clase de funciones con ciertas propiedades de simetría. Puesto que la ecuación de Laplace es invariante por rotaciones, es aconsejable buscar soluciones radiales, es decir soluciones que es función de:

$$r = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

El trabajo de investigación se desarrolla en base a la metodología utilizada en la teoría de optimización, definiendo un funcional asociado al sistema elíptico acoplado no lineal.

Para tal, se calcula la derivada de Gâteaux del funcional asociado al sistema (1.1), y se define una variedad topológica en base a esta derivada.

Por otro lado, con el funcional asociado se estudia los puntos críticos, para luego verificar las hipótesis contenidas en el Teorema pasa Montaña.

También se hace uso de la compacidad de los espacios de Sobolev H^2 en los espacios L^p para algún p .

3.1. Hipótesis central de la investigación

La existencia de solución del sistema (1.1) está sujeto a que el funcional asociado a dicho sistema elíptico acoplado no lineal satisface todas las hipótesis del Teorema pasa Montaña.

Se verifican ciertas desigualdades dependientes de soluciones radiales de ecuaciones elípticas no lineales.

3.2. Variables e indicadores de la investigación

Variable Independiente	:	**SISTEMA ELÍPTICO ACOPLADO NO LINEAL**
Variable Dependiente	:	**EXISTENCIA DE SOLUCIÓN**

3.3. Métodos de la investigación

El método de investigación es hipotético deductivo, puesto que se obtiene los resultados elaborando en forma deductiva las implicancias de las hipótesis consideradas. Consecuentemente se llega a las conclusiones a través de un procedimiento de cálculo formal, es decir, usaremos las herramientas matemáticas del Cálculo Variacional y técnicas del Análisis funcional, de esta forma implicará la contrastación de las hipótesis, como son la demostración de algunas proposiciones y teoremas centrales del trabajo de Investigación.

Por otro lado, la investigación es del tipo básica, puesto que busca ampliar los conocimientos y teorías que relacionan con otros temas como es la teoría de operadores en ecuaciones diferenciales parciales y la teoría de optimización. Así mismo de acuerdo al grado de manipulación de las variables, se trata de una investigación no experimental y por el tiempo que se realiza, es una investigación Transversal, puesto que se hizo un acópio de información en base a revistas y/o artículos especializados durante todo el trabajo de investigación.

3.4. Diseño o esquema de la investigación

Para contrastar la hipótesis de la investigación se ha aplicado el método pasa montaña, de modo a establecer una relación entre la variable independiente (sistema elíptico acoplado no lineal) con la variable dependiente (Existencia de Solución)

3.5. Población y muestra

El presente trabajo de investigación está limitado a una población definida precisamente por los espacios funcionales del Análisis Funcional que en este caso son los espacios de Hilbert $L^2(\Omega)$ y Sobolev $H^2\Omega$. Mientras que para la muestra se considera el modelo planteado por el sistema de ecuaciones (1.1).

3.6. Actividades del proceso investigativo

Etapas de la investigación con sus correspondientes técnicas e instrumentos de recolección consta de las siguientes fases:

- FASE INICIAL

  En esta fase se realizó un trabajo descriptivo y exploratorio de los datos y /o herramientas a estudiar. Luego se recopiló la información de manera más completa de revistas y/o artículos especializados, que permitió describir el método de estudio y las herramientas que se utilizaron para el presente trabajo de investigación.

- FASE INTERMEDIA

  En esta fase se realizó la construcción de un funcional asociado al sistema acoplado elíptico no lineal (1.1) y se determinó sus respectivas derivadas de Gâteaux de primera y segunda orden, seguidamente se definió una variedad sobre el espacio $H \times H \subset \mathrm{V} \times V$, la que jugó un papel fundamental en la minimización de dicho funcional.

Evidentemente se usa una de las caracterizaciones de un punto mínimo para un funcional sobre esta variedad.

FASE FINAL

Se realizó la contrastación de las hipótesis mediante una extensión del teorema de pasa montaña y de compacidad de los espacios de Sobolev en ciertos espacios L^p .

Evidentemente se demostró la existencia de ciertas constantes dependiendo de λ_i , μ_i
, $i = 1,2$ (números reales positivos) y α es un parámetro real, la que contribuyó para la existencia de soluciones del sistema acoplado elíptico no lineal (1.1).

3.7 Técnicas e instrumentos de la investigación

Los datos han sido obtenidos en base a revistas especializadas y/o artículos sobre el tema en cuestión.

- Para la variable independiente (**SISTEMA ELÍPTICO ACOPLADO NO LINEAL**) se ha revisado los temas relacionados con el trabajo de investigación que lo involucran en base al marco teórico y el cálculo formal y lógico.
- Para la variable dependiente (**EXISTENCIA DE SOLUCIÓN**) se relacionó con otros trabajos que aplican el teorema de pasa montaña, de modo a enfocar el método con mayor eficiencia para el trabajo de investigación.

- Validación de los Instrumentos

La validación de los instrumentos se hizo a través de teoremas del Análisis Funcional, aplicando una extensión del Teorema de pasa montaña y garantizar de esta manera la existencia de solución para el sistema acoplado elíptico no lineal (1.1).

3.8. Procedimiento para la recolección de datos (Validación y confiabilidad de los instrumentos)

La validación de los datos recopilados en el presente trabajo de investigación se valida por la Universidad Nacional del Santa como Universidad Licenciada por la Superintendencia Nacional de Educación Superior Universitaria (SUNEDU).

3.9 Técnicas de procesamiento y análisis de los datos

Para el procesamiento y análisis de los datos tomados respecto a las variables: Sistema elíptico acoplado no lineal se han considerado básicamente en la búsqueda de los métodos de demostración mediante la revisión de bibliografía especializada, es decir libros y artículos de la materia. Utilizando resultados del análisis funcional y de la teoría de optimización en los espacios de Sobolev, evidentemente se hizo uso de algunos teoremas del cálculo variacional, seguidamente se realizó la demostración de los puntos críticos del funcional asociado al sistema acoplado elíptico no lineal (1.1).

, consecuentemente se consigue demostrar la existencia de solución, para el modelo estudiado en el presente trabajo de investigación. Note que el sistema acoplado elíptico no lineal (1.1).

Se consigue la solución debido a que involucra métodos de minimización de funcionales así como un resultado de compacidad del Análisis Funcional.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1 Introducción

En esta sesión se presenta un análisis e interpretación de datos, en base a la metodología que se presentó en los capítulos anteriores para demostrar la existencia de soluciones de un sistema elíptico acoplado no lineal, más precisamente el siguiente sistema gobernado por ecuaciones diferenciales parciales del tipo elíptico no lineal:

$$\Delta^2 u - \sqrt{\lambda_1}\Delta u + \lambda_1 u = \mu_1 u^3 + \alpha u v^2 \quad (1)$$

$$\Delta^2 v - \sqrt{\lambda_1}\Delta v + \lambda_1 v = \mu_2\, v^3 + \alpha u^2 v \quad (2)$$

Donde:

λ_1 , λ_2 , μ_1 , μ_2 son números reales positivos y α es un parámetro. Sea V el espacio $V = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ con el producto interno

$$\big((u, v)\big) = (\Delta u, \Delta v) + \sqrt{\lambda_1}(\nabla u, \nabla v) \qquad (3)$$

Aquí (,) es el producto interno en $L^2(\Omega)$. Evidentemente su norma asociada es

$$\|u\|^2 = |\Delta u|^2 + \sqrt{\lambda_1}|\nabla u|^2 \qquad (4)$$

Considere el subespacio $H \times H$ el subespacio de V, que consiste de las funciones radiales con el producto interno:

$$((u,v))_i = (\Delta u, \Delta u) + \sqrt{\lambda_i}(\nabla u, \nabla v) + \lambda_i (u,v) \qquad (5)$$

De manera análoga su norma asociada viene dada por

$$\|u\|_i^2 = |\Delta u|^2 + \sqrt{\lambda_i}|\nabla u|^2 + \lambda_i |u|^2 \qquad (6)$$

Sea

$$J(u,v) = \frac{1}{2}\|u\|_1^2 + \frac{1}{2}\|v\|_2^2 - \frac{1}{4}\mu_1 \int_{\mathbb{R}^2} u^4 dx - \frac{1}{4}\mu_2 \int_{\mathbb{R}^2} v^4 dx - \frac{\alpha}{2}\int_{\mathbb{R}^2} u^2 v^2 dx$$

$\forall (u,v) \in V \times V$

Equivalentemente

$$J(u,v) = J_1(u) + J_2(v) - \frac{\alpha}{2}\int_{\mathbb{R}^2} u^2 v^2 dx \qquad (7)$$

Donde

$$J_i(u) = \frac{1}{2}\|u\|_i^2 - \frac{1}{4}\mu_i \int_{\mathbb{R}^2} u^4 dx \quad , \quad u \in V \quad , i = 1,2$$

Luego, $(u,v) \neq (0,0)$ es una solución con Energía finita del sistema elíptico acoplado no lineal (1) y (2) si se verifica $J'(u,v) = 0$

4.2 Análisis de datos

En esta sesión se desarrolla un análisis de los datos la que se traduce en algunas propiedades de los funcionales así como serán usados para los resultados y realizar su correspondiente interpretación.

Derivada de Gâteaux del funcional $J(u,v)$

Se sabe por definición que

$$\left(J'(u,v),(h,k)\right) = \lim_{t \to 0} \frac{[J(u+th, v+tk) - J(u,v)]}{t} \qquad (8)$$

$\forall (h,k) \in V \times V$. Sustituyendo el funcional $J(u,v)$ en (8) resulta:

$$\left(J'(u,v),(h,k)\right) = (\Delta u, \Delta h) + \sqrt{\lambda_1}(\nabla u, \nabla h) + \lambda_1 (u,h) - \mu_1 \int_{\mathbb{R}^2} u^3 h dx +$$

$$+(\Delta v, \Delta k) + \sqrt{\lambda_2}(\nabla u, \nabla k) + \lambda_2 (v,k) - \mu_2 \int_{\mathbb{R}^2} v^3 k dx - \alpha \int_{\mathbb{R}^2} uv^2\, h + u^2 v\, k dx \qquad (9)$$

De la relación (9) se puede tomar $h = u$ y $k = v$, para definir el siguiente funcional

$$L(u,v) = |\Delta u|^2 + \sqrt{\lambda_1}|\nabla u|^2 + \lambda_1|u|^2 + |\Delta v|^2 + \sqrt{\lambda_2}|\nabla v|^2 + \lambda_2|v|^2 -$$

$$-\mu_1 \int_{\mathbb{R}^2} u^4 dx - \mu_2 \int_{\mathbb{R}^2} v^4 dx - 2\alpha \int_{\mathbb{R}^2} u^2 v^2 dx \qquad (10)$$

4.3 Interpretación de datos

Mínimización del funcional $J(u,v)$ sobre una variedad

Sea **M** la variedad definida por

$$\mathbf{M} = \{(u,v) \in H \times H \backslash \{(0,0)\}\,;\ L(u,v) = 0\} \qquad (11)$$

Por otro lado, la derivada de Gâteaux para el funcional $L(u,v)$ dado en **(**10**)** es:

$$\big(L'(u,v),(u,v)\big) = -2(\|u\|_1^2 + \|v\|_2^2) < 0 \ ,(u,v) \in \mathbf{M} \qquad (12)$$

Es decir **M** es una variedad regular en la vecindad del punto $(u,v) \neq (0,0)$ con $L(u,v) = 0$.

Note que, cualquier punto crítico del funcional J sujeto a la variedad **M** , también es un punto crítico del funcional J.

Evidentemente, la segunda derivada del funcional $J(u,v)$ en el (0,0) con $(h,k) \in V \times V \backslash \{(0,0)\}$ viene dada por:

$$J''(0,0)(h,k)^2 = |\Delta h|^2 + \sqrt{\lambda_1}|\nabla h|^2 + \lambda_1|h|^2 + |\Delta k|^2 + \sqrt{\lambda_2}|\nabla k|^2 + \lambda_2|k|^2 > 0 \ (13)$$

Por lo tanto, $(0,0)$ es un mínimo estricto para el funcional J, de modo que $(0,0)$ es un punto aislado de la variedad **M,** consecuentemente, es una variedad regular completa.

Dada la ecuación

$$\Delta^2 z - \Delta z + z = z^3 \qquad (14)$$

Evidentemente, existe un única solución radial z de (14) (Vea Cortez,M.,1983) de modo que usando un cambio de escala se tiene que z_i viene a ser la solución de la ecuación:

$$\Delta^2 z - \sqrt{\lambda_i}\Delta z + \lambda_i z = \mu_i z^3 \qquad (15)$$

Donde z_i es dado por

$$z_i = \sqrt{\frac{\lambda_i}{\mu_i}}\, z\left(\sqrt[4]{\lambda_i}x\right) \qquad (16)$$

Considere las siguientes constantes positivas C_i , $i = 1,2$ definidas por:

$$C_1 = \inf_{k\in V\setminus\{0\}}\left(\frac{\|k\|_2^2}{\int_{\mathbb{R}^2} z_1^2\, k^2 dx}\right) \ , C_2 = \inf_{h\in V\setminus\{0\}}\left(\frac{\|h\|_1^2}{\int_{\mathbb{R}^2} z_2^2\, h^2 dx}\right) \qquad (17)$$

Siendo z_i solución de la ecuación

$$\Delta^2 z - \sqrt{\lambda_i}\Delta z + \lambda_i z = \mu_i z^3$$

Se deduce que, $(z_1, 0)$ y $(0, z_2)$ son soluciones particulares del sistema elíptico acoplado no lineal (1) y (2).

Sea $\mathbf{M}_i$ la variedad de **Nehari** definida por

$$\mathrm{M}_i = \left\{u \in V\, ; \left((J_i'(u), u)\right)_i = 0\right\}$$

Es decir,

$$\mathrm{M}_i = \left\{u \in V\, ; \|u\|_i^2 - \mu_i \int\limits_{\mathbb{R}^2} u^4 dx = 0\right\}, \qquad i = 1,2 \qquad (18)$$

Sea el funcional

$$T(u) = \|u\|_i^2 - \mu_i \int\limits_{\mathbb{R}^2} u^4 dx \quad , \quad u \in V$$

Luego, $(T'(u), h) = 0 \implies ((u,h))_i - 2\mu_i \int_{\mathbb{R}^2} u^3 h dx = 0 \qquad (19)$

Por lo tanto, para $z_i \in \mathrm{M}_i$, el vector tangente $h \in T_{z_i}\mathrm{M}_i$ si y solamente sí $(z_i, h) - 2\mu_1 \int_{\mathbb{R}^2} {z_i}^3 h dx = 0.$

De modo que

$$(h,k) \in T_{(u,v)}\mathbf{M} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\big((u,h)\big)_1 + \big((v,k)\big)_2 = 2\mu_1 \int_{\mathbb{R}^2} u^3 h dx +$$

$$+2\mu_2 \int_{\mathbb{R}^2} v^3 k dx + \alpha \int_{\mathbb{R}^2} uv^2\, h + u^2 v\, k dx \qquad (20)$$

En particular, se tiene que

$$(h,k) \in T_{(z_1,0)}\mathbf{M} \iff h \in T_{z_1}\mathrm{M}_1 \qquad (21)$$

Análogamente

$$(h,k) \in T_{(0,z_2)}\mathbf{M} \iff k \in T_{z_2}\mathrm{M}_2 \qquad (22)$$

Proposición 1.- Si $\alpha < \min\{C_1, C_2\}$. Entonces $(z_1, 0)$ y $(0, z_2)$ son mínimos locales estrictos del funcional $J(u,v)$ sobre la variedad **M.**

Demostración:

De la relación (9) se tiene

$$\big(J'(u,v),(h,k)\big) = (\Delta u, \Delta h) + \sqrt{\lambda_1}(\nabla u, \nabla h) + \lambda_1(u,h) - \mu_1 \int_{\mathbb{R}^2} u^3 h dx +$$

$$+(\Delta v, \Delta k) + \sqrt{\lambda_2}(\nabla v, \nabla k) + \lambda_2(v,k) - \mu_2 \int_{\mathbb{R}^2} v^3 k dx - \alpha \int_{\mathbb{R}^2} uv^2\, h + u^2 v\, k dx$$

En particular

$$\big(J'(z_1,0),(h,k)\big) = (\Delta z_1, \Delta h) + \sqrt{\lambda_1}(\nabla z_1, \nabla h) + \lambda_1(z_1,h) - \mu_1 \int_{\mathbb{R}^2} z_1^3 h dx \qquad (23)$$

De (15), se sabe que z_1 es solución de la ecuación $\Delta^2 z - \sqrt{\lambda_1}\Delta z + \lambda_1 z = \mu_1 z^3$, consecuentemente

$$J'(z_1, 0) = 0$$

Análogamente se deduce que $J'(0, z_2) = 0$. Por otro lado, un cálculo de la segunda diferencial para el funcional $J(u,v)$ se tiene en particular:

$$J''(z_1,0)(w_1,w_2)^2 = |\Delta w_1|^2 + \sqrt{\lambda_1}|\nabla w_1|^2 + \lambda_1|w_1|^2 - 3\mu_1 \int_{\mathbb{R}^2} z_1^2 w_1^2 dx +$$

$$+|\Delta w_2|^2 + \sqrt{\lambda_2}|\nabla w_2|^2 + \lambda_2|w_2|^2 - \alpha \int_{\mathbb{R}^2} z_1^2 w_2^2 dx \qquad (24)$$

Para $(w_1, w_2) \in T_{(z_1,0)}\mathbf{M}$ **.** Equivalentemente

$$J''(z_1,0)(w_1,w_2)^2 = J_1''(z_1)[w_1]^2 + \|w_2\|_2^2 - \alpha \int_{\mathbb{R}^2} z_1^2 w_2^2 dx \qquad (25)$$

Además siendo, z_1 un mínimo del funcional

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\|u\|_1^2 - \frac{1}{4}\mu_1 \int_{\mathbb{R}^2} u^4 dx$$

Sobre la variedad

$$\mathrm{M}_1 = \left\{ u \in V \; ; \|u\|_1^2 - \mu_1 \int_{\mathbb{R}^2} u^4 dx = 0 \right\}$$

Por una caracterización de mínimo de un funcional (Zeidler Eberhard,(1990)),existe una contante $k_1 > 0$ tal que

$$J_1''(z_1)[w_1]^2 \geq k_1\|w_1\|_1^2 \quad , \quad w_1 \in T_{z_1}\mathrm{M}_1 \qquad (26)$$

De las relaciones (25) y (26) se deduce que

$$J''(z_1,0)(w_1,w_2)^2 \geq k_1\|w_1\|_1^2 + \|w_2\|_2^2 - \alpha \int_{\mathbb{R}^2} z_1^2 w_2^2 dx \qquad (27)$$

De la relación (17) se tiene que

$$C_1 \leq \left(\frac{\|w\|_2^2}{\int_{\mathbb{R}^2} z_1^2 \, w^2 dx} \right) \;\; \Rightarrow \; - \int_{\mathbb{R}^2} z_1^2 \, w_2^2 dx \geq - \frac{\|w_2\|_2^2}{C_1}$$

Sustituyendo en la relación (27) resulta:

$$J''(z_1,0)(w_1,w_2)^2 \geq k_1\|w_1\|_1^2 + \|w_2\|_2^2 - \alpha \frac{\|w_2\|_2^2}{C_1}$$

Luego, si $\alpha < C_1$, podemos escoger una constante $0 < k_2 < 1$ tal que

$$J''(z_1,0)(w_1,w_2)^2 \geq k_1\|w_1\|_1^2 + k_2\|w_2\|_2^2 \geq k\|(w_1,w_2)\|_{H\times H}^2$$

Consecuentemente $(z_1, 0)$ es un mínimo local estricto del funcional $J(u, v)$ sobre la variedad **M.** De manera análoga se demuestra que $J(u, v)$ ue $(0, z_2)$ es un mínimo local estricto del funcional $J(u, v)$ sobre la variedad **M.**

4.4 Interpretación de los resultados.

Teorema 1.- Sea $a = \min\{C_1, C_2\}$ y $\alpha < a$. Entonces el sistema elíptico acoplado no lineal (1) y (2) tiene una solución radial con energía finita.

Demostración:

Sea (u_n, v_n) una secuencia en **M,** de la Proposición 1, se tiene que

$$0 < J(u_n, v_n) = \frac{1}{4}[\|u_n\|_1^2 + \|v_n\|_2^2] = \frac{\|(u_n, v_n)\|_{H\times H}^2}{4} \leq K$$

Además, por definición de la variedad **M,** se obtiene**:**

$$J'(u_n, v_n) \to 0 \;, n \to \infty$$

Luego, de la condición de Palais-Smale resulta que existe una subsucesión (u_{n_j}, v_{n_j}) de (u_n, v_n) tal que $J(u_{n_j}, v_{n_j})$ converge fuerte en $L^4(\Omega)$, $n > 4$.

Evidentemente, $J(0,0) = 0 < c_0$, además para algún $r > 0$ y $\boldsymbol{e} \in \mathbf{M}$ con $\|\boldsymbol{e}\| > r$

Escogiendo $0 < R < c_0$ de modo que $R > \|e\| > r$ se obtiene que

$$\frac{r^2}{4} < J(\boldsymbol{e}) < \frac{R^2}{4} < c_0$$

Se deduce que $c_0 > c_1 = \max\{J(\mathbf{0}), J(\boldsymbol{e})\}$

Luego, aplicando la extensión del teorema pasa montaña al funcional $J(u, v)$ sobre la variedad **M,** se consigue un punto crítico $(u, v) \in H \times H$ del funcional J, y consecuentemente una solución radial con energía finita del sistema elíptico acoplado no lineal (1) y (2).

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS

5.1. Conclusiones

- Del punto de vista variacional, la variedad de Nehari (Nehari (1960)) desempeñó un papel fundamental para el problema elíptico acoplado no lineal (1.1).
- La convergencia fuerte que se obtuvo en el resultado principal (Teorema 1) se debe a la compacidad de $H^2(\Omega)$ en $L^4(\Omega)$, n > 4.
- La existencia de una solución del problema elíptico acoplado no lineal (1.1) fue garantizado por una extensión del Teorema pasa montaña.
- La condición de Palais-Smale se verificó debido a la compacidad de $H^2(\Omega)$ en $L^4(\Omega)$, n > 4 .

5.2. Sugerencias

- Se sugiere realizar un trabajo de investigación cuando se considere el operador p laplaciano Δ^p ,donde p es un entero con la condición $p > 2$ y en mayores dimensiones.
- Se sugiere generalizar el operador considerado para el operador p laplaciano fraccionario Δ^p , y en mayores dimensiones.
- Se sugiere generalizar el operador para otro tipo de operadores elípticos acoplados no lineales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adams, R. A. (1975).Sobolev Spaces. Academic Press.

Ambrosetti,A y Colorado,E. (2006)Bound and ground states of coupled nonlinear Schrodinger equations , Elsevier

Ambrosetti,A. & P.H. Rabinowitz, Dual variational methods in critical point theory and applications, J. Funct. Anal. 49 (4) (1973) 349-381.

Akhmediev,N. y Ankiewics ,A. (2008).Dissipative Solitons: From Optics to Biology and Medicine Lectures notes in physics 751. Springer Verlag.

Binding, P.A., Drabek, P. & Y.X. Huang, Existence of multiple solutions of critical quasilinear elliptic Neumann problems, Nonlinear Anal. 42 (2000) 613–629.

Brezis, H. (1983). *Analyse Fonctionelle, theorie et applications*. Paris: Masson.

Clarke, F. (1990). Optimization and Nonsmooth Analysis. *SIAM Classics Appl. Math. 5.*

Cortez,M.(1983) Control óptimo para una ecuación elíptica no lineal, Tesis de Maestría.IMUFRJ, Brazil

Dancer,E.N. , Wei, J. y Weth,T. (2015). Solutions of Nonlinear Schrödinger Systems Springer Verlag.

Deimling, K. (2000*). Nonlinear Functional Analysis*. N.Y.: Springer Verlag.

Evans, L.(1998). Partial Differential Equations. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society.

Nehari, Z. On a class of nonlinear second-order differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960) 101–123

Pazy, A.(1983). Semigroups of Linear Operators and Application to Partial Differential Equations. Applied Mathematical Sciences. Springer New York.

Pucci,P. A. (1984). Mountain Pass Theorem, Journal differential equation.

Renardy, M. & Rogers, R. (1993). *An introduction to partial differential equations*. N.Y.: Springer Verlag.

Van Waarde, H.J., Trentelman, H. L. & Camlibel, M. K. (2017). Comments on necessity of diffusive couplings in linear synchronization problems with quadratic cost. *IEEE Trans. on Automatic Control*, *62*(6), 3099-3101.

Zeidler Eberhard, (1990) Nonlinear Funtional Analisys and its Aplications, Vol.II/A Springer-Verlag, New York.

Zhijie Chen, Wenming Zou. (2014). Standing waves for linearly coupled Schrodinger equations with critical exponent . Elsevier.

EXISTENCIA DE SOLUCIONES DE UN SISTEMA ELIPTICO ACOPLADO NO LINEAL

por José Simeón Quique Broncano

<1 %

10	Submitted to Universidad de Costa Rica Trabajo del estudiante	<1 %
11	Submitted to Universidad Manuela Beltrán Trabajo del estudiante	<1 %
12	dml.mathdoc.fr Fuente de Internet	<1 %
13	Tadeusz Iwaniec, Jani Onninen. "Hyperelastic Deformations of Smallest Total Energy", Archive for Rational Mechanics and Analysis, 2008 Publicación	<1 %
14	ejde.math.txstate.edu Fuente de Internet	<1 %
15	es.slideshare.net Fuente de Internet	<1 %
16	folk.ntnu.no Fuente de Internet	<1 %
17	hdl.handle.net Fuente de Internet	<1 %
18	qdoc.tips Fuente de Internet	<1 %
19	Adrián Ángel Inchauspe. "Solitons: A Cutting-Edge Scientific Proposal Explaining the	<1 %

Mechanisms of Acupuntural Action", Chinese Medicine, 2018
Publicación

20	caelum.ucv.ve Fuente de Internet	<1 %
21	ems.press Fuente de Internet	<1 %
22	link.springer.com Fuente de Internet	<1 %
23	www.stat.columbia.edu Fuente de Internet	<1 %
24	aran.library.nuigalway.ie Fuente de Internet	<1 %
25	repositorio.ute.edu.ec Fuente de Internet	<1 %
26	www.ubuntuz.com Fuente de Internet	<1 %
27	Submitted to Universidad Católica de Santa María Trabajo del estudiante	<1 %
28	es.coaching.itftennis.com Fuente de Internet	<1 %
29	repositorio.upse.edu.ec Fuente de Internet	<1 %

research.rug.nl

30	Fuente de Internet	<1 %
31	www.coursehero.com Fuente de Internet	<1 %
32	Giovanni P. Crespi. "Second Order Optimality Conditions for Nonsmooth Multiobjective Optimization Problems", Nonconvex Optimization and Its Applications, 2005 Publicación	<1 %
33	repositorio.uss.edu.pe Fuente de Internet	<1 %
34	royitec.20m.com Fuente de Internet	<1 %
35	www.mat.ufpb.br Fuente de Internet	<1 %
36	archive.org Fuente de Internet	<1 %
37	de.slideshare.net Fuente de Internet	<1 %
38	docplayer.es Fuente de Internet	<1 %
39	doku.pub Fuente de Internet	<1 %
40	es.scribd.com Fuente de Internet	<1 %

41	explora.unex.es Fuente de Internet	<1 %
42	gredos.usal.es Fuente de Internet	<1 %
43	repositorio.upao.edu.pe Fuente de Internet	<1 %
44	sci.ui.edu.ng Fuente de Internet	<1 %
45	tesis.ipn.mx Fuente de Internet	<1 %
46	Artur Sergyeyev. "Exact solvability of superintegrable Benenti systems", Journal of Mathematical Physics, 2007 Publicación	<1 %
47	Haïm Brezis, Louis Nirenberg. "Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical sobolev exponents", Communications on Pure and Applied Mathematics, 1983 Publicación	<1 %
48	Margaret A. Rees. "BIBLIOGRAPHY", Bulletin of Hispanic Studies, 2010 Publicación	<1 %

Excluir citas	Apagado	Excluir coincidencias	Apagado
Excluir bibliografía	Apagado		