UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SANTA
ESCUELA DE POSGRADO

“MÉTODO DE PENALIZACIÓN PARA UN SISTEMA ACOPLADO NO LINEAL”

Tesis para optar el grado de Doctor en Matemática

Autor:
Mg. ROBERTO VALENTÍN VITE CASAVERDE

Asesor:
Dr. MILTON MILCIADES CORTEZ GUTIERREZ

NUEVO CHIMBOTE – PERU
2021

UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

CONSTANCIA DE ASESORAMIENTO DE LA TESIS DOCTORAL

Yo, Dr. Milton Milciades Cortez Gutiérrez, mediante la presente certifico mi asesoramiento de la Tesis Doctoral titulada: "MÉTODO DE PENALIZACIÓN PARA UN SISTEMA ACOPLADO NO LINEAL", elaborada por el magister Roberto Valentin Vite Casaverde, para obtener el Grado Académico de Doctor en Matemática en la escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Santa.

Nuevo Chimbote, 3 de enero del 2022.

Dr. Milton Milciades Cortez Gutiérrez
ASESOR

ESCUELA DE POSGRADO

CONFORMIDAD DEL JURADO EVALUADOR

"MÉTODO DE PENALIZACIÓN PARA UN SISTEMA ACOPLADO NO LINEAL"

TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE DOCTOR EN MATEMÁTICA.

Revisado y Aprobado por el Jurado Evaluador:

Dr. Carlos Alberto Minchón Medina.

Presidente.

Dr. Teodoro Moore Flores.

Secretario.

Dr. Milton Milciades Cortez Gutiérrez

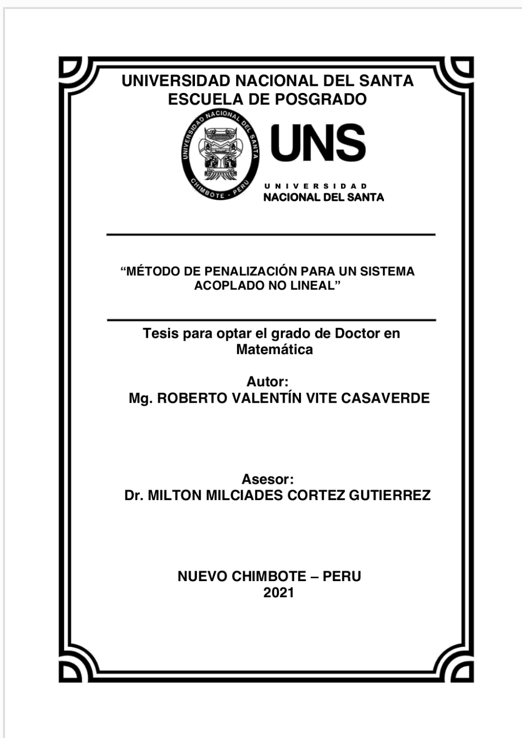
Vocal.

Recibo digital

Este recibo confirma quesu trabajo ha sido recibido por Turnitin. A continuación podrá ver la información del recibo con respecto a su entrega.

La primera página de tus entregas se muestra abajo.

Autor de la entrega:	Roberto Valentín Vite Casaverde
Título del ejercicio:	proyecto
Título de la entrega:	tesis doctoral
Nombre del archivo:	A.TESIS_FINAL-FINAL-UNS..docx
Tamaño del archivo:	515.59K
Total páginas:	42
Total de palabras:	6,126
Total de caracteres:	33,594
Fecha de entrega:	14-mar.-2022 12:28a. m. (UTC-0500)
Identificador de la entre...	1783799737



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SANTA
ESCUELA DE POSGRADO

UNS
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SANTA

"MÉTODO DE PENALIZACIÓN PARA UN SISTEMA ACOPLADO NO LINEAL"

Tesis para optar el grado de Doctor en Matemática

Autor:
Mg. ROBERTO VALENTÍN VITE CASAVERDE

Asesor:
Dr. MILTON MILCIADES CORTEZ GUTIERREZ

NUEVO CHIMBOTE – PERU
2021

DEDICATORIA

A mis adorados padres, Edilberto y Luzenelia.

A mi esposa Karina, y Roberto, Alexis, Daniel, Alejandra y Camilo razones infinitas de mi vida.

Indice General

MARCO TEÓRICO

MARCO METODOLÓGICO

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Resumen

En el presente trabajo de Investigación se demuestra la existencia de solución de un sistema acoplado no lineal en espacios de Sobolev mediante el método de penalización dicho modelo involucra ecuaciones diferenciales parciales del tipo elíptico, la cual se denomina la ecuación de estado y lo que origina su relación con la teoría de optimización. Asimismo, se ha desarrollado un problema aproximado con el objeto de demostrar la existencia de solución del problema original.

Con respecto a los sistemas acoplados y su relación con la teoría del control se ha creído conveniente considerar un funcional $J(v, z)$ definido convenientemente en los espacios de Hilbert $L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, lo que motivará a definir el problema penalizado de modo que usando las técnicas del Análisis Funcional se demuestra la existencia de solución del modelo planteado.

Abstract

In the present work of research one shows the existence of solution of a non linear coupled system in Sobolev space through the penalization method, such model involve partial differential equations of the elliptic type. Which one knows with the name of state equation and this implies the relation with the optimization theory. Moreover it has developed an approximated problem in order to show the existence of solution to the original problem. In spite of the coupled systems and the relationship with the control theory, one has taken account a functional $J(v, z)$ defined for convenience in the Hilbert space $L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, wherethereby will motivate the definition of the penalized problem in such a way that by using the Functional Analysis methods one shows the existence of solution for the proposed problem.

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo de Investigación intitulado “**MÉTODO DE PENALIZACIÓN PARA UN SISTEMA ACOPLADO NO LINEAL”** se trata de estudiar la existencia de solución de un sistema acoplado no lineal mediante el método de penalización, para tal se hizo un estudio de los espacios $L^p(\Omega),\ 1 < \mathrm{p} \leq \infty$, así como también los espacios de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ y sus respectivas propiedades. Por otro lado en el Capítulo I, se trata del problema de investigación, es decir su planteamiento así como su formulación. Ya en el Capítulo II, se desarrolla el Marco Teórico del trabajo, en el cual se fundamenta el aspecto teórico de la investigación junto con su Marco Conceptual.

Así mismo, en el Capítulo III, se trata del Marco Metodológico, la cual se hace uso de las técnicas e instrumentos de la investigación, por lo que se desarrolla secuencialmente las etapas elaborando en forma deductiva las implicancias de las hipótesis consideradas.

Cabe resaltar que la ciencia usa herramientas matemáticas que facilitan la existencia y unicidad de solución para problemas que modelan las ecuaciones diferenciales parciales. Para el trabajo de Investigación en mención se asocia un sistema acoplado a una ecuación diferencial parcial del tipo elíptica. De modo que se rige de un procedimiento de cálculo formal mediante el análisis Funcional.

En el Capítulo IV, se realiza el desarrollo de los resultados y discusión del trabajo de investigación, obtenido por el método de penalización, en el Capítulo III.

Finalmente, el Capítulo V, se logra obtener las conclusiones de los resultados principales obtenidos en el capítulo anterior, además se brinda algunas sugerencias del trabajo de investigación para futuros estudios posteriores.

CAPÍTULO I

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 Planteamiento y fundamentación del problema de investigación

El presente trabajo de Investigación se fundamenta en los trabajos más recientes realizados por los diferentes autores, como por ejemplo tenemos Junjie Jiao, Harry L.Trentelman y M. Kanat Camlibel (2016). Van Waarde, Harry L.Trentelman y M. Kanat Camlibel (2017),en las que trataron los problemas de control óptimo lineal cuadrático y de problemas de sincronización lineal en la necesidad de acoplamientos difusivos respectivamente. También se tiene los trabajos de Bonnans,J.F.-E.Casas(2016), y E. Casas (1986). en las que en ambos trabajos asocian control óptimo de sistemas elípticos semilineales y en general a problemas elípticos. Las tecnologías y aplicaciones modernas a la ciencia requieren herramientas matemáticas que faciliten la existencia de solución para un sistema acoplado no lineal. Es en esa dirección que surge los problemas inversos. Como bien se sabe las ecuaciones diferenciales parciales son clasificados en elípticas, parabólicas e hiperbólicas, para nuestro trabajo de Investigación asociaremos el sistema acoplado a una ecuación diferencial parcial del tipo elíptica, la cual se definirá un funcional cuadrático en base a la ecuación de estado. En el presente trabajo se introduce el método de penalización para demostrar la existencia de solución para un sistema acoplado no lineal, para los cuales se considera un cierto operador elíptico y se define los funcionales asociados. Para tal se considera una ecuación diferencial parcial del tipo elíptico con condiciones de frontera del tipo Dirichlet, siendo utilizada en una variedad de aplicaciones de la ingeniería. La teoría de las ecuaciones diferenciales parciales elípticas tuvo su auge en el siglo XX cuando los problemas del tipo estacionario de la ingeniería se formularon en términos variacionales, naturalmente sujeto a condiciones de contorno o de frontera. Tal como se aprecia en los trabajos de Agmon S.,Douglis A., y Nirenberg L. (1964). quienes son matemáticos que se dedicaron a problemas elípticos.

Una formulación variacional de estas ecuaciones diferenciales parciales elípticas fue introducida por Kinderlehrer, D. (1983). Por otro lado el acoplamiento a un problema de control óptimo cabe mencionar al matemático francés Lions, J.L.(1997)..

En cuanto al planteamiento del trabajo de investigación se considera el siguiente sistema acoplado no lineal:

$$
\begin{aligned}
&Ay - y^3 = u \quad , \quad \text{en } \Omega \\
&A^*y - 3y^2p = (y - y_d)^5 \quad , \quad y_d \in L^6(\Omega) \qquad (1.1) \\
&y = p = 0 \qquad\qquad \text{sobre } \partial\Omega
\end{aligned}
$$

Además

$$(p + Nu, v - u)_{L^2(\Omega)} \geq 0 \ , v \in U \subset L^2(\Omega) \ , \quad N \in \mathcal{L}\big(L^2(\Omega);\, L^2(\Omega)\big) \qquad (1.2)$$

Donde N es una aplicación Hermitiana y definida positiva en $L^2(\Omega)$, Ω es un conjunto abierto y acotado del espacio tridimensional bien regular, y cuya frontera está dada por $\partial\Omega$. Mientras que $u: \Omega \to$ R es una función real definida sobre Ω y es un elemento de $L^2(\Omega)$. Por otro lado $y: \Omega \to$ R es una función de $L^6(\Omega)$ y A es un operador de $H_0^1(\Omega)$ a $H^{-1}(\Omega)$ definido por

$$Ay = -\sum_{i,j}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial y}{\partial x_j}\right) + a_0(x)y \qquad (1.3)$$

El cual es un operador continuo. Supongamos que U es un conjunto convexo cerrado de $L^2(\Omega)$ tal que para todo $v \in U$ se tiene $Z(v) \neq \emptyset$

donde

$$Z(v) = \{y \in L^6(\Omega);\ Ay - y^3 = v \ , \ \text{en } \Omega \ , \qquad \mathrm{y} = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega\} \qquad (1.4)$$

$a_0(x) \geq 0$ para todo x en $\overline{\Omega}$ y $a_{ij}(x)$ son funciones de $L^\infty(\Omega)$ satisfaciendo la siguiente condición

$\sum_{i,j}^{3} a_{ij}(x)\xi_i\,\xi_j \geq \alpha\|\xi\|^2$, para todo x en $\overline{\Omega}$ y $\xi \in \mathbb{R}^3$.

Por otro lado se considera un funcional

$$\begin{cases} J(v,z) = \frac{1}{6}\|z - z_d\|_{L^6(\Omega)}^6 + \frac{1}{2}(Nv,v)_{L^2(\Omega)} \quad , z_d \in L^6(\Omega) \\ \qquad\qquad (v,z) \in L^2(\Omega) \times L^6(\Omega) \end{cases} \tag{1.5}$$

Sea Z_0 un subconjunto de $H_0^1(\Omega)$ definedo por

$$Z_0 = \{z \in H_0^1(\Omega)\,;\, Az \in L^2(\Omega)\} \tag{1.6}$$

Para todo $\varepsilon > 0$, se considera un término adicional al funcional $J(v,z)$ de tal manera que se tenga el siguiente funcional conocido como funcional penalizado:

$$J_\varepsilon(v,z) = J(v,z) + \frac{1}{2\varepsilon}|Az - z^3 - v|_{L^2(\Omega)}^2 \;,\;\; (v,z) \in L^2(\Omega) \times Z_0 \tag{1.7}$$

Consecuentemente, el problema penalizado consiste en encontrar un par

$(u_\varepsilon, y_\varepsilon) \in U \times Z_0$ tal que:

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon) = \inf\{J_\varepsilon(v,z)\,;\, v \in U \,, z \in Z_0\} \tag{1.8}$$

1.2. Antecedentes de la investigación

La teoría de sistemas de ecuaciones no lineales en R ^{n} ha sido desarrollado ampliamente en los trabajos realizados por Bazaraa,M., H. Sherali, C. M. Shetty (1993), asimismo también se aprecia en el trabajo realizado por Minoux, M. (1993). Por otro lado Luenberger, D. (2018), aplica métodos de penalización para problemas de programación no lineal en R ^{n}.

El método de penalización para una ecuación no lineal fue tratado recientemente por Stefan Scholtes y Michael Stohr (2006), para programas matemáticos con condiciones de equilibrio, en las que garantizan la existencia de funciones de penalización. Por otro lado Aihong Ren-Yuping Wang (2016), propusieron de una nueva función de penalización para programas matemáticos a dos niveles.

En el presente trabajo se pretende diseñar estratégias para sistemas de ecuaciones acopladas no lineales usando el método de penalización en espacio funcionales y más precisamente en espacios de Hilbert.

En los últimos años, estos modelos matemáticos están contenidos dentro de la teoría de optimización, tal como se aprecia en Clarke, F. H. (1990), todo un análisis convexo con aplicaciones a la ingeniería y su minimización de funcionales. También cabe resaltar los trabajos de Luenberger,D.C. (2016), en la que desarrolla la optimización vectorial, las caracterizaciones de estos funcionales es que originó las inecuaciones variacionales, trabajos de Leitman, G.(1969), también contribuyó para los problemas de control óptimo.

1.3. Formulación del problema de investigación

Un sistema acoplado no lineal en espacios funcionales, se modela mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} F(y,u) &= 0 \ , \ \text{en } \Omega \\ G(p,y) &= 0 \ , \ \text{en } \Omega \end{aligned} \qquad (1.9)$$

Donde: $u \in K$, para K un conjunto convexo, cerrado y no vacío de

$L^2(\Omega)$. Además $y \in L^6(\Omega)$, $p \in L^2(\Omega)$, $\Omega \subset R^n$.

¿ Existe y es única la solución del sistema acoplado no lineal (1.9)?

1.4. Delimitación del estudio

El estudio del presente trabajo de Tesis está delimitado básicamente en el siguiente funcional definido por:

$$J(v,z) = \frac{1}{6}\int_{\Omega} |z - z_d|^6 \, dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega} vNvdx \qquad (1.10)$$

Donde $z_d \in L^2(\Omega)$ es el estado ideal y N es un operador lineal continuo de $L^2(\Omega)$en $L^2(\Omega)$, admite un par $(u, y) \in L^2(\Omega) \times L^6(\Omega)$satisfaciendo: $u \in K$, $y \in Z(u)$ tal que

$$J(u, y) = inf\{J(v,z); \ v \in \widehat{K}, z \in Z(v)\} \qquad (1.11)$$

1.5. Justificación e importancia de la investigación

La presente investigación se justifica porque su importancia está basada en los problemas de transmisión no lineal, problemas de control óptimo, regulador no lineal y de manera general los programas matemáticos, en la que se pueden asociar a un problema de optimización, lo que conlleva a usar técnicas del método de penalización para sistemas acoplados no lineales en los espacios de Hilbert.

La importancia es implícita en el sentido de que se contribuye con la matemática abstracta en el contexto del análisis funcional el mismo que se tiene una aplicación directa.

El estudio posterior a este trabajo es seguir contribuyendo con el uso de las técnicas de optimización, Deimling, K.(2000) en modelos que representan ciertas ecuaciones diferenciales parciales.

Es interesante resaltar como existe relación entre las ecuaciones diferenciales parciales y los métodos variacionales, tal como se tiene en los trabajos realizados por Glowinski, R. (1984).

1.6. Formulación de los Objetivos de la investigación:

1.6.1. Objetivo General

Estudiar la existencia y unicidad de solución de un sistema acoplado no lineal mediante una técnica de minimización de funcionales, restringidas a un subconjunto de un espacio de Hilbert, la que se adjuntará a dicho sistema de modo que verifique ciertas propiedades y de esta manera pueda garantizar candidatos a un extremo.

1.6.2. Objetivos Específicos

- La ecuación de estado $Bz = v$ que es del tipo elíptico no lineal, admite una única solución .
- Sea $Z(v)$ el conjunto de las funciones $z \in L^6(\Omega)$ que verifica la ecuación de estado, para $v \in L^2(\Omega)$, $\Omega \subset R^3$.
- Dado el conjunto $U = \{v \in L^2(\Omega)\ ;\ Z(v) \neq \phi\}$

Supónga que $\widehat{K} = K \cap U \neq \phi$, donde K es un conjunto convexo, cerrado y no vacío de $L^2(\Omega)$.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1 Fundamentos teóricos de la investigación

El sistema acoplado no lineal (1.9) tiene su estudio de modo general en los programas matemáticos que originan problemas de minimización, tal como se aprecia en los trabajos realizados por Aihong Ren-Yuping Wang (2006) y Stefan Scholtes - Michael Stohr (2006) .

Por otro lado el sistema acoplado no lineal (1.9) las funciones involucradas se definen en $\Omega \subset R^3$, que vienen a ser funciones medibles.
Se definirán funcionales de la forma $J(y,u)$ definidas a principio en $L^6(\Omega)xL^2(\Omega)$.
Se definirá productos internos respectivos en estos espacios.

2.2 Marco Conceptual

2.2.1 Espacios de Hilbert

Definición 1.- Sea H un espacio vectorial sobre el campo de los reales provisto de un producto interno (.,.). H es un espacio de Hilbert si la norma inducida por el producto interno es un espacio normado completo. Es decir para toda sucesión de Cauchy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en H converge en la norma para un elemento de H.

2.2.2 Espacios $\mathbf{L}^{p}$ $(\boldsymbol{\Omega})$, $\mathbf{1} < \boldsymbol{p} \leq \infty$

Definición 2.- Se define el espacio $L^p(\Omega)$ como las funciones medibles $u: \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $|u(x)|^p$ es integrable, es decir:

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx < \infty$$

En particular en $L^2(\Omega)$ provisto de la norma

$$|u| = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

es un espacio de Hilbert.

2.2.3 Espacios $\mathbf{L}^{\infty}$ $(\boldsymbol{\Omega})$

Definición 3.- El espacio $L^{\infty}(\Omega)$ consiste de las funciones medibles esencialmente acotadas $u: \Omega \to \mathbb{R}$ con la norma

$$\|u\| = \sup \underset{\Omega}{\mathrm{ess}} |u|$$

2.2.4 Distribuciones

Definición 4.- Se dice que el funcional $\boldsymbol{T}: C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ es una distribución si satisface las siguientes condiciones:

i) **T** es lineal en $C_0^\infty(\Omega)$

ii) **T** es continuo en $C_0^\infty(\Omega)$

Donde $C_0^\infty(\Omega)$ es el espacio de las funciones infinitamente diferenciables y que tienen su soporte compacto en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Al conjunto de las distribuciones se le denota por $\mathcal{D}'(\Omega)$

Ejemplo 1: Dada la función impulso unitario en el punto a, definido por $\boldsymbol{\delta_a}: C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ como:

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$$

Evidentemente es una distribución sobre $C_0^\infty(\Omega)$, es decir satisface las condiciones (i) y (ii) de la Definición 4.

Definición 5.- Se dice que la distribución $\boldsymbol{T}: C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ tiene una derivada distribucional si

$$\langle \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial x_i}, \varphi \rangle = -\langle \boldsymbol{T}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle \quad , \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Lema 2.1 (Lema de Dubois Raymond)

La aplicación $\boldsymbol{\mathcal{T}}: L^p(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ es inyectiva . Es decir

$$\boldsymbol{\mathcal{T}} u = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = 0$$

Demostración

Ver Medeiros,L.(1977).

Ejemplo 2: Dada la función escalón unitario

$$\boldsymbol{f}(x) = H_a(x) = \begin{cases} 1\,, si\ x \geq a \\ 0\,, \ \ si\ x < a \end{cases} \ , \ \ a \geq 0$$

Su derivada distribucional es la distribución delta de Dirac en el punto a, es decir

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i} = \delta_a$$

En efecto, para $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ se tiene

$$\langle\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i},\varphi\rangle = -\langle \boldsymbol{f},\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f}\frac{d\varphi}{dx}\, dx = -\int_{\boldsymbol{a}}^{+\infty} \frac{d\varphi}{dx}\, dx = \varphi(a) = \langle\delta_a,\varphi\rangle$$

Por lo tanto del Lema de Dubois Raymond se deduce que

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i} = \delta_a$$

2.2.5 Espacios de Sobolev $\boldsymbol{H^1}(\boldsymbol{\Omega})$, $\boldsymbol{H_0^1}(\boldsymbol{\Omega})$ y $\boldsymbol{H^{-1}}(\boldsymbol{\Omega})$

Definición 6.- Se define el espacio de Sobolev de orden uno y se representa por $H^1(\Omega)$ como el espacio de las funciones $u \in L^2(\Omega)$ tales que todas las derivadas distribucionales $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$ pertenecen a $L^2(\Omega)$. $H^1(\Omega)$ con el producto interno

$\left((u,v)\right) = (u,v) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)$, donde $(,)$ denota el product interno en

$L^2(\Omega)$, es un espacio de Hilbert.

Definición 7.- Se define el espacio $H_0^1(\Omega)$ como la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$ con la norma equivalente

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx\right)^{1/2}$$

Definición 8.- El espacio $H^{-1}(\Omega)$ se define como su dual topológico de $H_0^1(\Omega)$. Además $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ con inmersión compacta, si satisface las siguientes condiciones:

i) $|u|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$, $u \in H_0^1(\Omega)$

ii) Toda sucesión acotada $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $H_0^1(\Omega)$, se puede encontrar una subsucesión $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge fuerte en $L^2(\Omega)$.

Y se denota por $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ (inmersión continua) si satisface la condición (i), mientras que si se verifica (i) y (ii) se le denota por

$$H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$$

2.2.6 El operador trazo

Definición 9.- El operador trazo es la aplicación

$$\gamma|_{\partial\Omega}: H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\partial\Omega)$$

sobreyectiva y continua tal como se aprecia en [1].

2.2.7 Diferenciable a Gateaux

Definición 10.- Un funcional

$$J: H \to \mathbb{R}$$

definido en un espacio de Hilbert H es diferenciable a Gateaux si existe el siguiente límite

$$\lim_{t\to 0} \frac{J(u+tv) - J(u)}{t}$$

y se le denota por $J'(u).v$ o también $\langle J'(u), v\rangle$

2.2.8 Forma bilineal

Definición 11.- Una forma bilineal en $V \times V$ es una aplicación $a: V \times V \to \mathbb{R}^+$, que es lineal en cada una de las variables de $(u, v) \in V \times V$.

Definición 12.- Una forma bilineal $a: V \times V \to \mathbb{R}^+$, es continua, si existe una constante positiva M tal que

$|a(u, v)| \leq M\|u\|\|v\|$, para todo (u, v) en $V \times V$

Definición 13.- Una forma bilineal $a: V \times V \to \mathbb{R}^+$, es simétrica, si se verifica

$a(u, v) = a(v, u)$, para todo (u, v) en $V \times V$

Definición 14.- Una forma bilineal $a: V \times V \to \mathbb{R}^+$, es coerciva (V-elíptica) en V, si existe una constante positiva α, tal que

$$a(v, v) \geq \alpha\|v\|^2 \ , \forall v \in V$$

2.2.9 Formulación Variacional

Definición 15.- Dada una forma bilineal $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}^{+}$, y un funcional lineal continuo $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, con $V \subset H$ (imersión contínua) Consecuentemente el problema variacional consiste en encontrar una única función

$u \in V$, tal que $a(u, v) = (f, v)$, $\forall\ v \in V$

Que será equivalente a minimizar el siguiente funcional cuadrático:

$$J(v) = \frac{1}{2}\ a(v,v)\ -\ (f,v)$$

definido en V. En efecto, sea $u \in V$ la solución del problema variacional y considere cualquier vector w de V. Consecuentemente la suma $v = u + w$ es cualquier vector de V y satisface:

$$J(u\ +\ w, u\ +\ w)\ =\ \frac{1}{2} a(u\ +\ w, u\ +\ w)\ -\ (f, u\ +\ w)$$

Desarrollando los productos internos se tiene:

$$J(u\ +\ w, u\ +\ w) = \frac{a(u,u)}{2} - (f,u) + \frac{a(u,w)}{2} - (f,w) + \frac{a(w,u)}{2} +$$

$$+\ \frac{1}{2}\ a(w,w)$$

De la simetría de la forma bilineal y del hecho de que u es solución, se obtiene

$$\frac{1}{2}\ a(u,w)\ -\ (f,w)\ +\ \frac{1}{2}\ a(w,u)\ =\ 0$$

Por lo tanto resulta

$$J(u\ +\ w, u\ +\ w) =\ J(u,u) + \frac{a(w,w)}{2}\ \geq\ J(u,u) + \alpha_2\|v\|^2\ \ \geq\ J(u,u)$$

Luego, $J(v, v) \geq J(u, u)$ para todo $v \in V$, demostrando que $J(v, v)$ asume su mínimo en $u \in V$. Como aplicación directa se tiene el siguiente problema de Dirichlet homogéneo:

Considere $V = H_0^1(\Omega)$ y $H = L^6(\Omega)$ la forma bilineal definida por

$$a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx + \int_{\Omega} b_0\, uvdx$$

Donde $a(u, v)$ satisface la siguiente desigualdad

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x)\; y_i y_j \;\geq\; C\|y\|^{\,2}$$

Para todo $x \in \overline{\Omega}$, $y \in \mathbb{R}^n$, $b_0(x) \geq 0$,para todo $x \in \overline{\Omega}$,

$f \in L^6(\Omega)$. Naturalmente $a(u, v)$ es una forma bilineal contínua, coerciva y simétrica en V. Luego existe un único $u \in H_0^1(\Omega)$, tal que

$$a(u, v) = (f, v)\ ,\ \forall\, v \in V$$

Es decir

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} b_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx + \int_{\Omega} b_0\, uvdx = \int_{\Omega} f\, vdx\ \ ,\forall\ \mathrm{v}\ \in\ \mathrm{V}$$

Se sabe que para las funciones $v \in C_0^{\infty}(\Omega)$, la primera integral del lado izquierdo, haciendo uso de una integración por partes se consigue

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(b_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) v\ dx + \int_{\Omega} b_0\, uvdx = \int_{\Omega} f\, vdx\ \ ,\forall\ \mathrm{v}\ \in\ C_0^{\infty}(\Omega)$$

Finalmente del Lema de Dubois Raymond, se consigue

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(b_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + b_0 u = f$$

Esta igualdad se entiende en el sentido de las distribuciones. Observe que cuando los coeficientes $b_{ij} = 0$, $i \neq j$, $b_{ii} = 1$, se tiene el operador Laplaciano:

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2}+b_0 u=f$$

Con esta ecuación diferencial parcial del tipo elíptica motivará un problema de control óptimo, de modo a que se pueda aplicar el método de penalización para un sistema acoplado no lineal.

2.2.10 Convergencia débil y fuerte en un espacio de Hilbert

Definición 15.- Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio de Hilbert H. Se dice que la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débil para una función u en H si

$$(u_n,v)\longrightarrow(u,v)\quad,\quad\forall\ v\ \in H$$

Donde $(.,.)$ es el producto interno en H. También se le denota por

$$u_n \rightharpoonup u\ ,\qquad \text{débil en}\ \ H\quad ,\text{n}\ \longrightarrow\infty$$

Definición 16.- Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio de Hilbert H. Se dice que la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fuerte para una función u en H si

$$\|u_n-u\|\longrightarrow\mathbf{0}\quad,\qquad \text{cuando n}\ \longrightarrow\infty$$

Donde $\|.\|$ es la norma inducida por el producto interno en H. También se le denota por

$$u_n\longrightarrow u\ \ ,\text{fuerte en}\ \ H$$

En el presente trabajo se estudia la existencia y unicidad de solución para el sistema acoplado no lineal (1)

$$\begin{aligned}F(y,u)&=0\ \ ,\ \ \text{en}\ \ \Omega\\ G(p,y)&=0\ \ ,\ \ \text{en}\ \ \Omega\end{aligned}\tag{1.12}$$

$$(\text{y},\text{u},\text{p})\in\ \text{L}^{6}(\Omega)\text{xL}^{2}(\Omega)\text{xL}^{2}(\Omega)$$

CAPÍTULO III

MARCO METODOLÓGICO

En este capítulo se describe la metodología utilizada en las diferentes etapas del estudio y los instrumentos de recolección de datos utilizados. Como una etapa inicial se demostró la existencia de solución para un problema elíptico mediante los métodos del Análisis Funcional y seguidamente se consideró un problema penalizado al cual se demuestra la existencia y unicidad de solución.

3.1. Hipótesis central de la investigación

Dado el sistema acoplado no lineal

$$\begin{array}{ll} Ay - y^3 = u & , \text{ en } \Omega \\ A^*y - 3y^2p = (y - y_d)^5 & , \ y_d \in L^6(\Omega) \\ y = p = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{array} \qquad (3.1)$$

Y considere

$$(p + Nu, v - u)_{L^2(\Omega)} \geq 0 \ , v \in U \subset L^2(\Omega) \ , \quad N \in \mathcal{L}\big(L^2(\Omega);\ L^2(\Omega)\big) \qquad (3.2)$$

De las relaciones (3.1) y (3.2) se deduce la siguiente hipótesis:

- Existe una única solución:

$$(y, p) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

- El problema penalizado (1.8) admite una única solución:

  $(u_\varepsilon, y_\varepsilon) \in U \times Z_0$

3.2. Variables e indicadores de la investigación

Variable Independiente : **SISTEMA ACOPLADO NO LINEAL**

Variable Dependiente : **PENALIZACIÓN**

3.3. Métodos de la investigación

El método es hipotético deductivo, ya que se obtiene los resultados elaborando en forma deductiva las implicancias de las hipótesis consideradas. De modo que se llega a las conclusiones a través de un procedimiento de cálculo formal, es decir, usaremos las herramientas matemáticas del Análisis Funcional, de esta forma implicará la contratación de las hipótesis, como son las estimativas a priori y teoremas de inmersión.

Por otro lado, es del tipo básica, porque busca ampliar los conocimientos y teorías relacionados con el tema conjuntamente con otros afines.

- Según el grado de manipulación de las variables

  Se trata de una investigación no experimental

- Según el tiempo en que se realiza

Es una investigación Transversal, para ello se recolectó los datos basados en revistas y/o artículos especializados a lo largo del trabajo.

3.4. Diseño o esquema de la investigación

Para demostrar la hipótesis de la investigación se ha elegido un método conocido como penalización, de modo a establecer una relación entre la variable independiente (Sistema acoplado no lineal) con la variable dependiente (Penalización)

3.5. Población y muestra

El trabajo de investigación involucra la población definida precisamente por los espacios funcionales del Análisis Funcional que en este caso son los espacios de Hilbert $L^2(\Omega)$ y Sobolev $H_0^1(\Omega)$, así como también el espacio de Banach $L^6(\Omega)$ y $L^\infty(\Omega)$.Mientras que para la muestra se considera una parte representativa de la población, que en la presente investigación son los modelos (1.1), (1.2), (1.3) y (1.4) que relacionan la característica fundamental en esta investigación.

3.6. Actividades del proceso investigativo

Etapas de la investigación con sus correspondientes técnicas e instrumentos de recolección consta de las siguientes fases:

- FASE INICIAL

  En esta fase se realizó un trabajo descriptivo y exploratorio de los datos y /o herramientas a estudiar. Luego se recopiló la información de manera más completa de revistas y/o artículos especializados, que permitió describir el método de estudio y las herramientas que se utilizaron para el presente trabajo de investigación.

- FASE INTERMEDIA

  En esta fase se demostró un teorema relacionado a un problema elíptico no lineal, así como un estudio detallado usando las técnicas del Análisis Funcional. Los datos a contrastar para la variable dependiente fueron relacionadas con un problema equivalente a un problema de minimización de funcionales.

- FASE FINAL

  Se realizó la contrastación de las hipótesis mediante los teoremas de la teoría de optimización, que se realizó las caracterizaciones de los funcionales y el grado de incidencia hacia la variable dependiente (penalización). Finalmente se estudió las convergencias de los problemas aproximados para resolver los modelos planteados originalmente.

3.7 Técnicas e instrumentos de la investigación

Los datos han sido obtenidos en base a revistas especializadas y/o artículos sobre el tema en cuestión.

- Para la variable independiente (Sistema acoplado no lineal) se ha revisado temas afines que lo involucran en base al marco teórico y la operacionalización de las mismas .
- Para la variable dependiente (Penalización) se relacionó con otros trabajos de modo a enfocar el método con los más viables para el trabajo de investigación.

- Validación de los Instrumentos

  La validación de los instrumentos se hizo a través de teoremas del Análisis Funcional, usando técnicas multiplicativas para conseguir estimativas a priori y garantizar de esta manera existencia de solución de problemas aproximados, que posteriormente al pasar el límite se obtendrá la solución del trabajo de investigación.

3.8. Procedimiento para la recolección de datos (Validación y confiabilidad de los instrumentos)

La validación de los datos recopilados en el presente trabajo de investigación se valida por la Universidad Nacional del Santa como Universidad Licenciada por la Superintendencia Nacional de Educación Superior Universitaria (SUNEDU).

3.9 Técnicas de procesamiento y análisis de los datos

Para el procesamiento y análisis de los datos tomados respecto a las variables: sistema acoplado no lineal y Penalización se han considerado básicamente en la búsqueda de las técnicas mediante la revisión de bibliografía especializada, es decir libros y artículos de la materia. Utilizando resultados del análisis funcional y de la teoría de optimización, entre ellos: los espacios L^p, el teorema de Lax Milgran, los espacios de Sobolev, el teorema del cálculo variacional, seguidamente se realiza el método de los multiplicadores, consecuentemente se consigue demostrar la existencia de solución, así como la unicidad de la solución de los modelos estudiados en el presente trabajo de investigación.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. Introducción.

El propósito de este capítulo es hacer un análisis de los datos recopilados en el capítulo 1 y dar una interpretación de los resultados obtenidos.
Inicialmente se demuestra la existencia de un Sistema acoplado no lineal en espacios de Sobolev mediante el método de penalización. Es importante recalcar que el sistema acoplado ha tenido un interés sustancial en el ámbito de la matemática en los últimos años, debido a su amplia aplicabilidad en problemas de control óptimo el cual envuelve la minimización de funcionales sujetos a una condición sobre la variable estado y con controles de entrada, es decir se encuentra enmarcado en un problema de optimización no lineal.

4.2 Análisis de los datos

En esta sesión se desarrolla un análisis de los datos la que se traduce en algunas propiedades de los espacios de Sobolev así como serán usados para los resultados y realizar su correspondiente interpretación.

Proposición 4.1 (Desigualdad de Poincaré)

Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$. Entonces existe una constante $C > 0$ independiente de u tal que

$$|u|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad , \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega)$$

Demostración

Ver Medeiros,L. (1977).

Teorema 4.1 (Teorema de Lax-Milgram)

Si $a: V \times V \to \mathbb{R}^+$ es una forma bilineal, continua, coerciva en V y f un funcional lineal continuo en V . Entonces el problema variacional tiene una única solución $u \in V$. Además la aplicación $f \longrightarrow u$ es continua de V' en V.

Demostración

Ver Medeiros,L. (1977).

A continuación se demuestra un resultado mediante un teorema para el problema de optimización:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } u \in U \subset L^2(\Omega)\,, y \in Z(u) \text{ tal que} \\ \\ \quad J(u,y) = \inf\{J(v,z)\,; v \in U\,, z \in Z(v)\ \} \end{cases} \qquad (4.1)$$

Donde el funcional J es dado por

$$\begin{cases} J(v,z) = \frac{1}{6}\|z - z_d\|_{L^6(\Omega)}^6 + \frac{1}{2}(Nv,v)_{L^2(\Omega)} \quad , z_d \in L^6(\Omega) \\ \qquad\qquad (v,z) \in L^2(\Omega) \times L^6(\Omega) \end{cases} \qquad (4.2)$$

4.3 Interpretación de datos

Teorema 4.2 El problema (4.1) tiene una solución $(u,y) \in U \times Z(u)$ tal que

$$J(u,y) = \inf\{J(v,z)\,;\, v \in U\,, z \in Z(v)\ \}$$

Demostración

Considere el siguiente conjunto

$$X = \{(v,z)\,;\, v \in U\,, z \in Z(v)\ \}$$

Naturalmente X es un conjunto no vacío y se tiene:

$$0 \leq a = \inf J(X)$$

Puesto que J es acotado inferiormente, existe una sucesión minimizante $\{(v_m, z_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{m\to\infty} J(v_m, z_m) = a$$

Por lo tanto, la sucesión $\{J(v_m, z_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ es acotado en X el cual implica que

$\frac{1}{6}\|z_m - z_d\|_{L^6(\Omega)}^6 + \frac{1}{2}(Nv_m, v_m)_{L^2(\Omega)} \leq C$ para alguna constante $C > 0$ y para todo $m \in \mathbb{N}$. Además, de la desigualdad anterior se deduce que

$$\|z_m\|_{L^6(\Omega)} \leq C \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}. \quad (4.3)$$

$$\|v_m\|_{L^2(\Omega)} \leq C \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}. \quad (4.4)$$

Consecuentemente,

$$\|Az_m\|_{L^2(\Omega)} = \|z_m^3 + v_m\|_{L^2(\Omega)} \leq C \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}. \qquad (4.4)$$

Evidentemente se sabe que $|(Az_m, z_m)| \geq \alpha\|\nabla z_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \alpha\|z_m\|_{H_0^1(\Omega)}^2$. Es decir,

$$\|z_m\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}. \quad (4.5)$$

Puesto que la inmersión de $H_0^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ es compacta, se puede extraer una subsucesión que aún lo denotamos por $\{z_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, satisfaciendo:

$$z_m \longrightarrow y\,, \qquad \text{débil en} \quad L^6(\Omega) \qquad (4.6)$$

$$z_m \longrightarrow y\,, \qquad \text{débil en} \quad H_0^1(\Omega) \qquad (4.7)$$

$$z_m \longrightarrow y\,, \qquad \text{fuerte en} \quad L^2(\Omega) \qquad (4.8)$$

Cuando $m \longrightarrow \infty$. Además

$$v_m \longrightarrow u\,, \qquad \text{débil en} \quad L^2(\Omega) \qquad (4.9)$$

$$z_m^3(x) \longrightarrow y^3\,, \qquad \text{c.s. en } \Omega \qquad (4.10)$$

Usando (1.5) y (1.13) se obtiene

$$z_m^3 \longrightarrow y^3 \quad \text{débil en} \quad L^2(\Omega) \qquad (4.11)$$

Puesto que la aplicación A es continua de $H_0^1(\Omega)$ en $H^{-1}(\Omega)$, resulta de (4.7) que

$$Az_m \longrightarrow Ay\,, \qquad \text{débil en} \quad H^{-1}(\Omega) \qquad (4.12)$$

Así, en particular de (4.9) y (4.11) resulta

$$v_m \longrightarrow u\,, \qquad \text{débil en} \quad H^{-1}(\Omega) \qquad (4.13)$$

$$z_m^3 \longrightarrow y^3\,, \qquad \text{débil en} \quad H^{-1}(\Omega) \qquad (4.14)$$

Por otro lado, de las relaciones (4.12)-(4.14) y puesto que $y \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{cases} Ay - y^3 = u \;\;, \;\; \text{en } \Omega \\ y = 0 \qquad\qquad \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases} \qquad (4.15)$$

Se demuestra que si U es un conjunto convexo y cerrado de $L^2(\Omega)$, entonces U es un conjunto cerrado en la topología débil, de donde se obtiene que $u \in U$, por lo tanto

$$(u, y) \in U \times Z(u) \qquad (4.16)$$

Es decir, resulta

$$a \leq J(u, y) \qquad (4.17)$$

Además, de las relaciones (4.6) y (4.9) se deduce que

$$(v_m, z_m) \longrightarrow (u, y) \;\;, \qquad \text{débil en} \quad L^2(\Omega) \times L^6(\Omega) \qquad (4.18)$$

Y de la semicontinuidad inferior de las normas, resulta

$$J(u, y) \leq \lim_{m \to \infty} J(v_m, z_m) = a$$

Por lo tanto, se concluye que

$$J(u, y) = a = \inf J(X)$$

4.4 Interpretación de los resultados

Teorema 4.3 Sean A, N y U dados anteriormente , suponga que la siguiente hipótesis se verifica:

$0 \in U$ y $\|z_d\|_{L^6(\Omega)} \leq C$ para alguna constante $C > 0$.

Entonces existe $(u, y, p) \in U \times L^6(\Omega) \times L^2(\Omega)$ satisfaciendo las siguientes condiciones:

$$Ay - y^3 = u \quad , \quad \text{en } \Omega \tag{4.19}$$

$$A^* y - 3y^2 p = (y - y_d)^5 \tag{4.20}$$

$$y = p = 0 \qquad \text{on} \quad \partial\Omega \tag{4.21}$$

$$(p + Nu, v - u)_{L^2(\Omega)} \geq 0 \ , \text{para todo } v \in U \tag{4.22}$$

y (u, y) es una solución del problema (4.1).

Demostración

Sea Z_0 un subconjunto de $H_0^1(\Omega)$ definido por:

$$Z_0 = \{z \in H_0^1(\Omega) \, ; Az \in L^2(\Omega)\}$$

para todo $\varepsilon > 0$, se agrega un término de penalización al funcional $J(v, z)$ de la siguiente manera:

$$J_\varepsilon(v, z) = J(v, z) + \frac{1}{2\varepsilon}|Az - z^3 - v|^2_{L^2(\Omega)} \ , \ (v, z) \in L^2(\Omega) \times Z_0 \tag{4.23}$$

Consecuentemente, el problema penalizado consiste en encontrar un par

$(u_\varepsilon, y_\varepsilon) \in U \times Z_0$ tal que

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon) = \inf\{J_\varepsilon(v, z) \, ; v \in U \, , z \in Z_0\} \tag{4.24}$$

Por otro lado, del Teorema 4.2 se puede demostrar de manera similar la existencia de solución para el problema penalizado.

Además $(u_\varepsilon, y_\varepsilon)$ es caracterizado por las siguientes relaciones:

$$(p_\varepsilon, Az - 3y_\varepsilon^2 z)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega (y_\varepsilon - z_d)^5 \, z \, dx \ \ \text{para todo } z \in Z_0 \tag{4.25}$$

$$(p_\varepsilon + Nu_\varepsilon, v - u_\varepsilon)_{L^2(\Omega)} \geq 0 \ \ \text{para todo } v \in U \tag{4.26}$$

Donde

$$p_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon}(Ay_\varepsilon - y_\varepsilon^3 - u_\varepsilon) \ , \ \varepsilon > 0 \tag{4.27}$$

Puesto que el funcional J_ε es diferenciable a Gateaux, de la hipótesis se verifica, la siguiente expresión (4.25).

y

$$\frac{1}{6}\|y_\varepsilon - z_d\|^6_{L^6(\Omega)} \leq J_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq J(0,0) = \frac{1}{6}\|z_d\|^6_{L^6(\Omega)} \tag{4.28}$$

Por el teorema de Lax -Milgram se deduce que existe $z_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} Az_\varepsilon - 3y_\varepsilon^2 z_\varepsilon = p_\varepsilon \ , \ \text{ en } \Omega \\ \\ \ z_\varepsilon = 0 \quad , \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{4.29}$$

Además, vemos que se obtiene

$\|z_\varepsilon\|^6_{L^6(\Omega)} \leq C$, para alguna constante $C > 0$. (4.30)

Observando la ecuación (4.28), se puede afirmar mediante el uso de la desigualdad de Cauchy- Schwartz que:

$$|p_\varepsilon|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|y_\varepsilon - z_d\|^6_{L^6(\Omega)}\|z_\varepsilon\|^6_{L^6(\Omega)} \tag{4.31}$$

De donde, se deduce de las relaciones (4.29), (4.30) y (4.31) que

$$\{p_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \quad \text{es acotado en } L^2(\Omega) \tag{4.32}$$

Por lo tanto existe una subsucesión $\{\varepsilon_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ de números reales positivos de modo tal que se tiene las siguientes convergencias , cuando m tiende al infinito

$$p_{\varepsilon_m} \longrightarrow p \ , \qquad \text{débil en } L^2(\Omega) \tag{4.33}$$

$$\left(p_{\varepsilon_m}, Az - 3y^2_{\varepsilon_m} z\right)_{L^2(\Omega)} \longrightarrow (p, Az - 3y^2 z)_{L^2(\Omega)} \ , \ z \in Z_0 \tag{4.34}$$

$$\left(p_{\varepsilon_m} + Nu_{\varepsilon_m}, v - u_{\varepsilon_m}\right)_{L^2(\Omega)} \longrightarrow (p + Nu, v - u)_{L^2(\Omega)} \ , \qquad v \in U \tag{4.35}$$

$$\int_\Omega \left(y_{\varepsilon_m} - z_d\right)^5 z \, dx \longrightarrow \int_\Omega (y - z_d)^5 z \, dx \quad , \quad z \in Z_0 \tag{4.36}$$

$$\left(u_{\varepsilon_m}, y_{\varepsilon_m}\right) \longrightarrow (u, y) \ , \qquad \text{fuerte en } L^2(\Omega) \times L^6(\Omega) \tag{4.37}$$

Además, se consigue

$$J(u, y) = \inf\{J(v, z) \, ; v \in U \, , z \in Z(v) \ \}$$

Consecuentemente, de las relaciones (4.34), (4.36) y la convergencia dada anteriormente , se obtiene la siguiente igualdad

$$(p, Az - 3y^2 z)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega (y - z_d)^5 z \, dx \quad , \quad z \in Z_0 \tag{4.38}$$

De donde resulta (4.20).

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS

5.1. Conclusiones

- Cualquier funcional definido en un espacio de Hilbert con la hipótesis de ser convexo y diferenciable a Gateaux, se garantiza la conclusión del Teorema 4.2.,es decir existe solución del problema (4.1).
- La convergencia fuerte que se obtuvo en (4.8) resultó de la compacidad de $H_0^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$.
- La existencia de una única solución del problema elíptico (4.29) fue garantizado por el Teorema de Lax-Milgram.
- El método de penalización según la relación (4.23) resolvió el problema de sistema acoplado no lineal, puesto que fue posible demostrar a través de las convergencias para la solución, cuando $\varepsilon \to 0$.

5.2. Sugerencias

- Se sugiere realizar un trabajo de investigación cuando la dimensión espacial es mayor que 3.
- Se sugiere generalizar el operador considerado para otro tipo de operadores elípticos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adams, R. (1972). Sobolev space. Academic press N.Y.

Agmon, S. (1959). The L^p approach to the Dirichlet problem. Annali dela Scuola Normale Sup. Pisa vol. XIII pp. 405-447.

Agmon S.-,Douglis A., y Nirenberg L. (1964). Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, Commun. Pure Appl. Math. 1735-92.

Aihong Ren-Yuping Wang (2016). A novel penalty function method for semivectorial bilevel programming problem .Applied Mathematical modelling Vol. 40 January, Pages 135-149 Elsevier

Bonnans, J.F. y E.Casas. (2016).Contrôle de systèmes elliptiques semilineaires comportant des contraintes distribuées sur l'état, in. Nonlinear partial differential equations and their applications, edited by H. Brezis and J.L. Lions Pitman (1988).

Bachman,G.-Narici,L. (1988)Functional Analysis" Dover Books on Mathematics,N.Y.1988

Bazaraa,M.- H. Sherali, C. M. Shetty. (1993). Nonlinear Programming: Theory and Algorithms. John Wiley & Sons.

Brezis, Haim. (1983). Analyse Fonctionelle, theorie et applications. Masson, Paris.

Clason, C.,Karl Kunisch, Armin Rund.(2016). Nonconvex penalization of switching control of partial differential equations. Article in Systems & Control Letters ·

Casas, E. (1986) .Control of an elliptic problem with pointwise state constraints SIAM J. Control Optim. 24, 1309-1318

Clarke, F. H. (1990). Optimization and Nonsmooth Analysis. Classics Appl. Math. 5. SIAM, 2 edition.

Deimling,Klaus. (2000). Nonlinear Functional Analysis. Springer Verlag , N.Y.

Glowinski, Roland (1984). Numerical Methods for Nonlinear Variational problems. Springer Verlag , N.Y.

Junjie Jiao, Harry L.Trentelman y M. Kanat Camlibel, A .(2018).Suboptimality Approach to distributed linear quadratic optimal control, Journal of Latex class files Vol.14 N°8

Kasumba,H. and K. Kunisch. (2014). On computation of the shape hessian of the cost functional without shape sensitivity of the state variable, Journal of Optimization Theory and Applications, pp. 126.

Kunisch, K. Ito, K and G. H. Peichl. (2008). Variational approach to shape derivatives, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 14 pp. 517-539.

Kadoch,B., D. Kolomenskiy, P. Angot and K. Schneider, A. (2012). volume penalization method for incompressible flows and scalar advection–diffusion with moving Obstacles. Vol.231,issue 12, pages 4365-4464

Kinderlehrer,D. (1983). An introducction to variational inequalities and their applications Siam Classic in Pure Math.

Luenberger. David. (2018). Linear and Nonlinear Programming. Second edition John Wiley New York.

Luenberger,D.C. (2016). Optimization by vector space methods. Ed. John Wiley New York,

Leitmann,G. (1969). Sufficiency theorems for optimal control Journal optim. Theory Appl. Vol.3 76-78.

Lions,J,L. (1997). Optimal control in Partial differential equation, 40 pp 353-370.

Minoux. M.(1995). Mathematical programming: Theory and algorithms. John Wiley and Sons.

Medeiros, L.A. and Milla, M. (1977). Weak solutions for a nonlinear dispersive equation. J. Math. Anal. Appl. 59, 432 – 441.

Montenbruck, J. M. -G. S. Schmidt, G. S. Seyboth, and F. Allgöwer. (2015). On the necessity of diffusive couplings in linear synchronization problems with quadratic cost. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 60, no. 11, pp. 3029–3034

Philip, P. (2009). Optimal Control and Partial Differential Equations. Technical report, LMU Berlin.

Renardy,M. and Rogers,R. (1993). An introduction to partial differential equations. Springer Verlag N.Y.

Scott, A.- Silvestre, L. (2011). Unique continuation for fully nonlinear elliptic equations. Cornell University N.Y.

Stefan Scholtes - Michael Stohr. (2006). Exact Penalization of Mathematical Programs with Equilibrium Constraints SIAM J. Control Optim., 37(2), 617–652. (36 pages).

Tucker, A.-LLanko,S. (2005). The use of negative penalty functions in solving partial differential equations. Communications in Numerical Methods in Engineering. 21 (3), 99-106.

Van Leuwen,T.and F.J. Herrmann. (2015). A penalty method for PDE-constrained optimization in inverse problems. 32(1):015007. Utrecht University, Utrecht, the Netherlands

Van Waarde H.J., Harry L.Trentelman y M. Kanat Camlibel. (2017).Cdomments on necessity of diffusive couplings in linear synchronization problems with quadratic cost ,IEEE Trans. on Automatic Control Vol.62 n°6 3099-3101.

tesis doctoral

por Roberto Valentín Vite Casaverde

Fecha de entrega: 14-mar-2022 12:28a.m. (UTC-0500)
Identificador de la entrega: 1783799737
Nombre del archivo: A.TESIS_FINAL-FINAL-UNS..docx (515.59K)
Total de palabras: 6126
Total de caracteres: 33594

tesis doctoral

INFORME DE ORIGINALIDAD

16%	11%	0%	13%
INDICE DE SIMILITUD	FUENTES DE INTERNET	PUBLICACIONES	TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1	repositorio.uns.edu.pe Fuente de Internet	8%
2	Submitted to Universidad Alas Peruanas Trabajo del estudiante	7%
3	hdl.handle.net Fuente de Internet	1%
4	1library.co Fuente de Internet	<1%
5	Submitted to Unviersidad de Granada Trabajo del estudiante	<1%
6	repositorio.ucv.edu.pe Fuente de Internet	<1%

Excluir citas	Activo	Excluir coincidencias	< 15 words
Excluir bibliografía	Activo		