EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN PARA LA ECUACIÓN DE ONDA SEMILINEAL CON DISIPACIÓN LOCALIZADA NO LINEAL

TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE DOCTOR EN MATEMÁTICA

Autor:

Mg. Carlos Alberto Peña Miranda

Asesor:

Dr. Milton Milciades Cortez Gutiérrez

NUEVO CHIMBOTE - PERÚ

2021

CONSTANCIA DE ASESORAMIENTO DE LA TESIS

Yo **Milton Milciades Cortez Gutiérrez**, mediante la presente certifico mi asesoramiento de la Tesis Doctoral titulada: **EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN PARA LA ECUACIÓN DE ONDA SEMILINEAL CON DISIPACIÓN LOCALIZADA NO LINEAL**, elaborada por el magister **Carlos Alberto Peña Miranda**. para obtener el Grado Académico de Doctor en Matemática en la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Santa.

Nuevo Chimbote, agosto del 2021.

Dr. Milton Milciades Cortez Gutiérrez

ASESOR

CONFORMIDAD DEL JURADO EVALUADOR

"EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN PARA LA ECUACIÓN DE ONDA SEMILINEAL CON DISIPACIÓN LOCALIZADA NO LINEAL"

TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE DOCTOR MATEMÁTICA

Revisado y Aprobado por el Jurado Evaluador:

Dra. Yheni Farfán Machaca
PRESIDENTA

Dra. Frida Coaquira Nina
SECRETARIA

Dr. Milton Milciades Cortez Gutiérrez
VOCAL

turnitin

Digital Receipt

This receipt acknowledges that Turnitin received your paper. Below you will find the receipt information regarding your submission.

The first page of your submissions is displayed below.

Submission author:	Carlos Alberto PEÑA MIRANDA
Assignment title:	DOCTORADO EN MATEMATICA
Submission title:	Existencia y unicidad de solución para la ecuación de onda s...
File name:	TESIS.pdf
File size:	728.46K
Page count:	51
Word count:	11,551
Character count:	47,581
Submission date:	26-Aug-2021 10:54AM (UTC-0500)
Submission ID:	1159672633

UNS

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN PARA LA ECUACIÓN DE ONDA SEMILINEAL CON DISIPACIÓN LOCALIZADA NO LINEAL

TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE DOCTOR EN MATEMÁTICA

Autor:

Mg. Carlos Alberto Peña Miranda

Asesor:

Dr. Milton Milciades Cortez Gutiérrez

NUEVO CHIMBOTE - PERÚ

2021

Dedicado a mis padres Olga† y Féliz†, que han sabido con sabiduría y amor orientarme con buenos valores y principios hacia el camino correcto.

.

Agradecimientos

Doy gracias a Dios todopoderoso por la oportunidad de vivir otro momento inolvidable en mi vida que es la conclusión de este trabajo.

Gracias a mi razón de inspiración y estimulo, mis hijos. Además le agradezco a mi amada esposa por su compresión y por su apoyo moral.

A mi familia por su constante apoyo y motivación.

A los profesores de la Escuela de Posgrado de la UNS, en especial a mi asesor, por compartir su valioso conocimiento y asesoramiento hasta la culminación de este trabajo.

A los amigos del doctorado, en especial a Alex, Henry y Eugenio, con quienes pasé los mejores momentos de mi vida, por las discusiones y convivencia que me ayudaron mucho. Muchas gracias por el compañerismo, el apoyo y el cariño.

Finalmente, a todas aquellas personas que han contribuido de alguna manera en el logro de esta tesis..

Índice general

RESUMEN

El presente trabajo de investigación tuvo como objetivo estudiar la existencia y unicidad para la ecuación de onda semilineal con disipación localizada no lineal. El método fue deductivo y demostrativo; porque nos permitió construir soluciones aproximadas en un espacio de dimensión finita, obtener estimaciones para las soluciones aproximadas, realizar pasaje de límite de las soluciones aproximadas y usar técnicas multiplicativas. Finalmente, con la aplicación del método de Faedo-Galerkin y la teoría de semigrupos, se demostró la existencia única de la solución para el problema de la ecuación de onda semilineal.

Palabras claves: ecuación de onda, disipación localizada, solución regular, método de Faedo–Galerkin.

ABSTRACT

The present research work aimed to study the existence and uniqueness for the semilinear wave equation with nonlinear localized dissipation. The method was deductive and demonstrative; because it allowed us constructing approximate solutions in a finite dimensional space, obtain estimates for the approximate solutions, carry out limit passage of the approximate solutions and use multiplicative techniques. Finally, with the application of the Faedo-Galerkin method and the theory of semigroups, the unique existence of the solution for the problem of the semilinear wave equation was demonstrated.

Key words: wave equation, localized dissipation, smooth solution, Faedo–Galerkin method.

Introducción

“Desde el año 1980, se estudia la ecuación de onda no homogénea con el término disipativo u_t, dado por

$$u_{tt} - \Delta u + u_t = f \text{ en } \Omega \times (0, +\infty)$$

con condiciones de frontera del tipo Dirichlet o Neumnann y sus respectivas condiciones iniciales” (Peña, 2012, p. 1). Estas ecuaciones como el nombre lo dice, esta asociado a la propagación de ondas sonoras, ondas de luz y ondas en el agua.

Por ello, “modelar un problema de la vida real desde el punto de vista matemático en el que se haga intervenir dos o más variables independientes conduce a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales” (Giordano, 2016, p. 6).

Una ecuación en derivadas parciales (EDP) es una expresión de la forma

$$F(x, t, u, \partial_{x_1} u, \partial_{x_2} u, \cdots, \partial_{x_n} u, \partial_t u, \cdots, D^\alpha u) = 0 \qquad (1)$$

donde la función incógnita $u = u(x, t)$ depende de la variable espacial $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ y de la variable temporal t.

La ecuación (1), establece una relación entre la incógnita u, sus derivadas parciales y el punto (x, t). A continuación se presentan algunos ejemplos de EDPs:

a) Ecuación de Laplace con potencial: $-\Delta u + u = f$.

b) Ecuacion del calor: $u_t - \Delta u = 0$.

b) Ecuación de Onda: $u_{tt} - \Delta u = 0$

En nuestro trabajo de investigación se estudia la ecuación de onda semilineal

$$u_{tt} - \Delta u + \alpha(x)u + f(u) + a(x)g(u_t) = 0$$

donde $u = u(x, t)$ es la función incógnita y representa la deformación vertical de la onda en el punto $x \in \mathbb{R}^n$ y el tiempo $t \in \mathbb{R}^+$. El término $g(u_t)$ representa una disipación por fricción en la onda.

La presente investigación, tiene la siguiente estructura:

El primer capítulo comprende el planteamiento del problema, los antecedentes de la investigación, la formulación del problema, la delimitación del estudio, la justificación e importancia de la investigación y los objetivo de la investigación.

En el segundo capítulo se expone el marco teórico de la investigación y el marco conceptual para el desarrollo de nuestro trabajo. En el tercer capítulo se formula las hipótesis de la investigación, las variables e indicadores de la investigación, el método y el diseño de la investigación, así como también la población y la muestra de la investigación realizada.

En el cuarto capítulo se presenta los resultados y discusión de la investigación realizada, donde se demuestra la existencia única de la solución de la ecuación de onda semilineal estudiada. Finalmente en el quinto capítulo se dan las conclusiones y recomendaciones del trabajo de investigación; al final de este trabajo de investigación se encuentran las referencias bibliográficas respecto a los libros y artículos que se han considerado para realizar la presente investigación.

Capítulo 1

Problema de investigación

1.1. Planteamiento y fundamentación del problema de investigación

En muchos problemas físicos, hay dos o más variables independientes, de modo que el modelo matemático correspondiente implica ecuaciones diferenciales parciales. Algunas EDPs pueden resolverse mediante integración directa, cambio de variable, separacion de variables y principio de superposición pero a pesar de ser posible la obtención de la solución en forma explícita, no permite estudiar situaciones en las que las funciones involucradas no presentan derivadas clásicas lo que afecta notablemente la existencia y unicidad; por ello se recurre a funciones que poseen derivadas en el sentido de distribuciones, derivadas que permite tratar el estudio de las EDPs en espacios funcionales adecuados tales como los Espacios de Sobolev que es una herramienta matemática aplicable a una variedad de modelos matemáticos.

En esta investigación se considera la ecuación de onda semilineal

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \alpha(x)u + f(u) + a(x)g(u_t) = 0 & \text{en } \Omega \times [0, +\infty[, \\ u = 0 & \text{en } \Gamma \times [0, +\infty[, \\ u(x,0) = u_0(x);\ \ u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

donde Ω es un conjunto abierto acotado, bien regular de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ con frontera $\Gamma = \partial\Omega$.

Que siendo una EDP de segundo orden con disipación localizada no lineal, nos centraremos en estudiar la existencia y unicidad de la solución.

1.2. Antecedentes de la investigación

“Los trabajos de sistemas con disipación localmente distribuidos se estudian con bastante interés desde la década de los 90 hasta la fecha, estos sobre dominios Ω acotados de $\mathbb{R}^n$, aplicados a diferentes sistemas como podemos citar: viscoelástico, termoelásticos, problemas de contacto, ecuación de Kirchoff, entre otros” (Peña, 2012, p. 1).

En el artículo *Exponential decay for the semilinear wave equations, with locally distributed damping*, Enrique Zuazua (1990) estudia la ecuación de la onda semilineal con disipación localizada en un dominio acotado Ω de $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \alpha u + f(u) + a(x)u_t = 0 & \text{en } \Omega \times [0, +\infty[, \\ u(x,0) = u_0(x);\ u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \Gamma \times [0, +\infty[, \end{cases} \tag{1.1}$$

y demuestra que para cualquier dato inicial $\{u_0, u_1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, existe únicamente una solución débil de (1.1) en la clase

$$u \in C([0, +\infty); H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, +\infty); L^2(\Omega)).$$

Posteriormente, el mismo autor Enrique Zuazua (1991) en su artículo *Exponential decay for the semilinear wave equations, with localized Damping in Unbounded Domains*, profundiza el trabajo realizado en 1990, estudiando el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \alpha u + f(u) + a(x)u_t = 0 \ \text{ en } \ \mathbb{R}^n \times (0, +\infty), \\ u(0) = u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n);\ u_t(0) = u_1 \in L^2(\mathbb{R}^n), \end{cases} \tag{1.2}$$

y demuestra que la energía $E(t)$ es una función no creciente de la variable de tiempo t y el problema (1.2) tiene una solución única en $C([0, +\infty); H^1(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, +\infty); L^2(\mathbb{R}^n))$.

En su artículo *Decay of solutions of the wave equation with a local degenerate dissipation*, Mitsuhiro Nakao (1996) profundiza el trabajo realizado por Enrique Zuazua, estudiando el siguiente problema

$$u_{tt} - \Delta u + \alpha u + a(x)u_t = 0 \tag{1.3}$$

y con la hipótesis

$$a(x) > 0 \text{ y } \int_\omega \frac{1}{a(x)^p} dx < \infty \text{ para algún } 0 < p < 1.$$

demuestra la existencia de solucion globlal y el decaimiento de soluciones débiles de la ecuación (1.3).

Posteriormente, Alisson Rafael Aguiar Barbosa (2005) en sus tesis de maestría *Existência Global e Propriedades Assintóticas para a Equação Semilinear da Onda em* $\mathbb{R}^n$ estudia la ecuación de la onda semilineal en $\mathbb{R}^n$, dado por:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u_t = |u|^p & (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \\ u_{|t=0} = \varepsilon u_0, \quad u_{t_{|t=0}} = \varepsilon u_1 \end{cases} \tag{1.4}$$

y demuestra la existencia única de la solución global de la ecuación (1.4) y analiza el comportamiento de la solución para grandes tiempos.

1.3. Formulación del problema de investigación

Sea Ω un conjunto abierto acotado, bien regular de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ con frontera $\Gamma = \partial\Omega$, se plantea la siguiente ecuación diferencial

$$u_{tt} - \Delta u + \alpha(x)u + f(u) + a(x)g(u_t) = 0 \text{ en } \Omega \times [0, +\infty[\tag{1.5}$$

con condicion de frontera

$$u(x,t) = 0, \text{ en } (x,t) \in \Gamma \times [0, +\infty[\tag{1.6}$$

y condiciones iniciales

$$u(x,0) = u_0(x), \; u_t(x,0) = u_1(x), \; x \in \Omega. \tag{1.7}$$

Formulación del problema

En la presente investigación se pretende dar respuesta a la siguiente interrogante:

¿Existe y es única la solución del problema (1.5) – (1.7)?

1.4. Delimitación del estudio

El trabajo de investigación está centrado en los espacios de Sobolev $H^1(\Omega)$, teoría de distribuciones $D'(\Omega)$, espacios de Lebesgue $L^p(\Omega)$, espacio de funciones vectoriales $L(0, T; H)$ y la teoria de semigrupos lineales.

1.5. Justificación e importancia de la investigación

La justificación del presente trabajo de investigación radica que la ecuación de onda es uno de los modelos matemáticos más relevantes que se escribe en términos de EDP. Así, se trata de un modelo que esta presente en transmisión de ondas en materiales compuestos y vibraciones transversales de placas con rigidez, pero también en el ámbito de la propagación de ondas acústicas o electromagnéticas y en las distintas áreas del conocimiento.

Esta investigación tiene una importancia teórica y práctica, ya que los resultados obtenidos se podrá aplicar a otras EDPs, por ejemplos: ecuación del calor, ecuación de Schrodinger, ecuación de Kirchoff, etc.

1.6. Objetivos de la investigación

Objetivo general

Estudiar la existencia y unicidad de solución del problema (1.5) – (1.7).

Objetivos específicos

a) Demostrar la existencia de solución del problema (1.5) – (1.7).

b) Demostrar la unicidad de solución del problema (1.5) – (1.7).

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. Fundamentos teóricos de la investigación

En esta sección, presentamos definiciones y resultados propios del análisis funcional que se usó en el capítulo 4. El lector interesado puede consultar los libros de Adams (1975), Brezis (2010), Coddington y Levinson (1955), Edwards (1965) y Lions (1968).

2.1.1. Espacios de Sobolev

Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{Z}^+$ y $1 \leq p \leq \infty$. "El ***Espacio de Sobolev*** $W^{m,p}(\Omega)$ se define por:

$$W^{m,p}(\Omega) = \Big\{ u \in L^p(\Omega) \ / \ D^\alpha u \in L^p(\Omega), \ \forall |\alpha| \leq m \Big\}$$

donde $D^\alpha u$ es la derivada en el sentido distribucional, dotado con la norma

$$|u|^p_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx, \text{ si } 1 \leq p < \infty$$

y

$$|u|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|_\infty, \text{ si } p = \infty,$$

hace de $W^{m,p}(\Omega)$ un espacio de Banach" (Adams, 1975, p. 60).

Notación. Cuando $p = 2$ el espacio $W^{m,2}(\Omega)$ es denotado por $H^m(\Omega)$.

Proposición 2.1. *"El espacio $H^m(\Omega)$ equipado con el producto interno*

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx$$

es un espacio de Hilbert" (Brezis, 2010, p. 271).

Proposición 2.2 (Fórmula de Green). *"Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado bien regular. Si $u, v \in H^1(\Omega)$, entonces pada cada $1 \leq i \leq n$ tenemos que*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x_i} v \nu_i$$

donde $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ denota el vector normal unitario exterior de Γ.
Si $u \in H^2(\Omega)$ y $v \in H^1(\Omega)$ tenemos

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx = \int_\Omega (-\Delta u) v dx + \int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma$$

donde $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ es la derivada direccional en la dirección del vector ν" (Kesavan, 1989, p. 102).

2.1.2. Espacios Funcionales a Valores Vectoriales

Sea V un espacio de Banach y $0 < T < \infty$.

Definición 2.1. Sea $1 \leq p < \infty$, se denota con $L^p(0,T;V)$ "el espacio vectorial de (clases de) funciones $u :]0,T[\to V$ *medibles* tales que $t \mapsto |u(t)|_V^p$ es integrable – Lebesgue en $]0,T[$" (Zeidler, 1989, p. 407).
"En $L^p(0,T;V)$ definimos la norma

$$|u|_{L^p(0,T;V)} = \left(\int_0^T |u(t)|_V^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

dotado de ésta norma, $L^p(0,T;V)$ resulta ser un espacio de Banach" (Zeidler, 1989, p. 407).
Cuando $p = \infty$, definimos

$$L^\infty(0,T;V) = \Big\{ T :]0,T[\to V \; / \; u \text{ es medible y } \sup_{t \in]0,T[} \text{ess} |u(t)|_V < \infty \Big\}.$$

"En $L^\infty(0,T;V)$ definimos la norma

$$|u|_{L^\infty(0,T;V)} = \sup_{t \in]0,T[} \text{ess} |u(t)|_V$$

con esta norma $L^\infty(0,T;V)$ resulta ser un espacio de Banach" (Zeidler, 1989, p. 407).

Observación 2.1. "En particular si $p = 2$ y V es un espacio de Hilbert, el espacio $L^2(0,T;V)$ resulta ser un espacio de Hilbert con el producto interno

$$(u,v)_{L^2(0,T;V)} = \int_0^T \big(u(t), v(t)\big)_V dt$$

donde $\big(u(t), v(t)\big)_V$ denota el producto interno en V." (Peña, 2012, p. 12).

Si V es un espacio reflexivo, entonces podemos hacer la siguiente identificación

$$[L^p(0,T;V)]' = L^q(0,T;V')$$

donde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Cuando p = 1, haremos la identificación

$$[L^1(0,T;V)]' = L^\infty(0,T;V')$$

Observación 2.2. Cuando Ω es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$, $T > 0$ y $Q = \Omega \times (0,T)$ un cilindro en $\mathbb{R}^{n+1}$. Entonces, para $1 \leq p < \infty$ resulta

$$L^p(0,T;L^p(\Omega)) = L^p(Q).$$

Definición 2.2. Sea $m \in \mathbb{N}$, "el espacio $C^m([0,T];V)$ consiste de todas las funciones continuas $u : [0,T] \to V$ tal que tiene derivadas continuas hasta el orden m sobre $[0,T]$ y cuya norma es dada por

$$|u|_{C^m([0,T];V)} = \sum_{j=0}^{m} \max_{0\leq t\leq T} |u^{(j)}(t)|$$

" (Zeidler, 1989, p. 407). Aquí las derivadas a derecha e izquierda en los puntos de frontera $t = 0$ y $t = T$ existen.

Lema 2.1. *"Sean H y V espacios de Hilbert tal que $H \hookrightarrow V$. Si $u \in L^p(0,T;H)$ y $u' \in L^p(0,T;V)$, $1 \leq p \leq \infty$ entonces $u \in C^0([0,T];V)$" (Teman, 1979, p. 260).*

2.1.3. Convergencia débil y débil*

Sea V un espacio de Banach y V' su dual.

Definición 2.3. Una sucesión $(u_m)_{m\geq 1} \subseteq V$ es llamada ***débilmente convergente*** para u, denotado por

$$u_m \rightharpoonup u \text{ cuando } m \to \infty$$

si y solamente si

$$\langle f, u_m\rangle \to \langle f, u\rangle \text{ cuando } m \to \infty \ \forall f \in V'.$$

Teorema 2.1. *"Sea V es un espacio Banach reflexivo. Entonces para cada sucesión acotada $(u_m)_{m\geq 1} \subseteq V$ posee una subsucesión débilmente convergente (Brezis, 2010, p. 69).*

Observación 2.3. Recordemos que, $u_m \to u$ cuando $m \to \infty$ en un espacio de Banach V significa que $|u_m - u|_V \to 0$ cuando $m \to \infty$. Esta convergencia usual en V es comúnmente llamada convergencia fuerte en V.

Definición 2.4. Una sucesión $(f_m)_{m\geq 1} \subseteq V'$, ***converge débil**** a f, denotado por

$$f_m \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ cuando } m \to \infty$$

si y solamente si

$$\langle f_m, u\rangle \to \langle f, u\rangle \text{ cuando } m \to \infty, \text{ para todo } u \in V.$$

Teorema 2.2. *"Sea V un espacio de Banach separable. Entonces para cada sucesión acotada $(f_m)_{m\geq 1}$ en V' posee una subsucesion convergente débil* "(Brezis, 2010).*

Lema 2.3 (Lions)**.** *"Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ acotado; (g_k) y g funciones de $L^p(\Omega)$, con $1 < p < \infty$, tal que:*

1. *(g_k) es acotada en $L^p(\Omega)$,*

2. *$g_k \to g$ casi siempre en Ω.*

Entonces $g_k \rightharpoonup g$ débilmente en $L^p(\Omega)$" (Lions, 1968, p. 12).

Lema 2.4 (Lions – Aubin). *"Sean B_0, B y B_1 espacios de Banach tal que $B_0 \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow B_1$ donde B_0, B y B_1 son reflexivos, definamos*

$$W = \Big\{u;\ u \in L^{p_0}(0,T;B_0),\ u' \in L^{p_1}(0,T;B_1)\Big\},$$

donde $1 \leq p_0, p_1 < \infty$ y $T < \infty$ con la norma definida por

$$|u|_W = |u|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + |u'|_{L^{p_1}(0,T;B_1)}.$$

Entonces W es un espacio de Banach y la inmersión

$$W \overset{c}{\hookrightarrow} L^{p_0}(0,T;B)$$

es compacta" (Lions, 1968, p. 58).

2.1.4. Problema semilineal abstracto

Consideremos el problema de valor inicial semilineal de la forma

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = F(u), \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

donde $A : D(A) \longrightarrow H$ es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracción de clase C_0 sobre un espacio de Banach H y $F : H \to H$ una función continua.

Definición 2.5. Diremos que una función u es una solución débil del problema (2.1) si $u \in C([0,T];H)$ y verifica la ecuación integral dada por

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s))ds. \tag{2.2}$$

Lema 2.5. *Sean $T > 0$ y $u_0 \in H$. Si u y $v \in C([0,T];H)$ son dos soluciones de (2.2), entonces $u = v$.*

Demostración. Como u y v son dos soluciones de (2.2) entonces

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s))ds,$$

$$v(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(v(s))ds.$$

Luego

$$\begin{aligned} |u(t) - v(t)| &= \left| \int_0^t S(t-s)(F(u(s)) - F(v(s)))ds \right| \\ &\leq \int_0^t |S(t-s)||F(u(s)) - F(v(s))|ds \\ &\leq L_M \int_0^t |u(s) - v(s)|ds \end{aligned}$$

y por la desigualdad de Gronwall obtenemos $u = v$. $\square$

Definición 2.6. "Diremos que una aplicación $F : H \to H$ es ***localmente Lipschitziana***, si para cada constante positiva M existe una constante L_M tal que

$$|F(u) - F(v)| \leq L_M |u - v|$$

para todo $u, v \in H$ tal que $|u| \leq M$ y $|v| \leq M$" (Peña, 2012, p. 18).

Teorema 2.6. *"Sea $F : H \to H$ localmente Lipschitziana, entonces para cada $u_0 \in H$, existe una única solución débil de (2.1) definida en $[0,T]$. Mas aún si $u_0 \in D(A)$, la solución es clásica" (Peña, 2012, p. 18).*

Definición 2.7. "Sean $T_1 < T_2$ y u_1, u_2 dos soluciones débiles de (2.1) sobre $[0,T_1]$ y $[0,T_2]$ respectivamente, por unicidad tenemos que $u_1 = u_2$ sobre $[0,T_1]$. Considerando la familia $(u_i)_{i\in I}$ de todas las soluciones débiles de (2.1) definidas en algún intervalo $([0,T_i])_{i\in I}$. Definimos

$$T_{max} = \sup_{i\in I} T_i,$$

entonces T_{max} puede ser finito o $+\infty$. Definimos la función $u(t)$ sobre $[0, T_{max}[$ por

$$u(t) = u_i(t) \text{ si } t \in [0,T_i],\ i \in I$$

esta función está bien definida por la unicidad en cada intervalo $[0, T_i]$. Esta solución es llamada ***solución maximal de*** (2.1)" (Peña, 2012, p. 19).

Teorema 2.7. *"Si u es una solución maximal de (2.1), entonces*

$$T_{max} = +\infty \ \text{ ó } si \ \ T_{max} < +\infty \ entonces \lim_{t \to t_{max}} |u(t)| = +\infty.$$

En el primer caso, diremos que u es una solución global y en el segundo caso, diremos que la solución explota en tiempo finito" (Peña, 2012, p. 20).

2.1.5. Teorema de Carathéodory

Definición 2.8. *"Decimos que $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ cumple **las condiciones de Carathéodory** en D si $f(t, x)$ es medible en t para cada x fijo y continua en x para cada t fijo. Si para cada compacto $K \subset \Omega$, existe una función real $m(t)$, integrable tal que*

$$|f(t, x)| \leq m(t), \ para\ todo\ (t, x) \in K\text{" } (Rincon,\ 2004,\ p.\ 6)$$

Consideremos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{2.3}$$

y el rectángulo R, definido por

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}; \ |t - t_0| \leq a, \ |x - x_0| \leq b, a > 0, \ b > 0\}$$

donde (t_0, x_0) es un punto fijo de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Teorema 2.8 (Carathéodory). *"Si $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ cumple las condiciones de Carathéodory sobre R, entonces existe una solución $x(t)$ de (2.3) en algún intervalo $|t - \tau| < \beta$, donde $\beta > 0$ es una costante positiva"(Coddington y Levinson, 1955, p. 43).*

Corolario 2.9. *"Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ y f cumple las condiciones de Carathéodory sobre Ω, entonces el problema (2.3) tiene solución para todo (t_0, x_0)" (Rincon, 2004, p. 15).*

Teorema 2.10 (Prolongamiento de solución). *"Sea $\Omega = [0, T[\times B$ con $T > 0$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq b\}$ donde $b > 0$ es una constante positiva y $|\cdot|$ la norma euclidiana de $\mathbb{R}^n$. Supongamos que f cumple las dos primeras condiciones de Carathéodory en Ω y existe una función $m(t)$ integrable tal que*

$$|f(t, x)| \leq m(t), \ para\ todo\ (x, t) \in \Omega.$$

Sea $x(t)$ es una solución de (2.3) y definida en el intervalo I para todo $t \in I$ tal que $|x(t)| \leq M$, $\forall t \in I$, M independiente de I y $M < b$. Entonces $x(t)$ puede extenderse a todo el intervalo $[0, T]$" (Rincon, 2004, p. 16).

2.1.6. Teorema de Lax – Milgram

Sea V un espacio de Hilbert.

Definición 2.9. Diremos que una forma bilineal $a : V \times V \to \mathbb{R}$ es

(i) *Continua*, si existe $C > 0$ tal que $a(u, v) \leq C|u||v|$ $\forall u, v \in V$.

(ii) V*–coerciva*, si existe $\alpha > 0$ tal que $a(u, u) \geq \alpha |u|^2$ $\forall u, v \in V$.

(iii) *Simétrica*, $a(u, v) = a(v, u)$ $\forall u, v \in V$.

Teorema 2.11 (Lax – Milgram). *"Si $a : V \times V \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal, V – coerciva y continua, entonces para todo $f \in V'$, existe un único $u \in V$ tal que*

$$a(u, v) = (f, v), \text{ para todo } v \in V.$$

Además, si a es simétrica entonces el funcional $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - (f, v)$$

alcanza su mínimo en u" (Kesavan, 1989, p. 115).

2.1.7. Algunas desigualdades

Proposición 2.3 (Desigualdad de Hölder). *"Sean $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^q(\Omega)$, con $1 \leq p \leq \infty$ y $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Entonces $uv \in L^1(\Omega)$ y se tiene la siguiente desigualdad*

$$\int_\Omega |(uv)(x)| dx \leq |u|_{L^p(\Omega)} |u|_{L^q(\Omega)} \text{" (Brezis, 2010, p. 92).}$$

Observación 2.4. En $L^2(\Omega)$ la desigualdad de Hölder es conocida como ***Desigualdad de Schwarz***.

Corolario 2.12. *"Sean $f_1, f_2, \ldots, f_k$ funciones tal que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $1 \leq i \leq k$ donde $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + \ldots + \dfrac{1}{p_k} \leq 1$. Entonces el producto $f = f_1 f_2 \ldots f_k \in L^p(\Omega)$ y se tiene la siguiente desigualdad*

$$|f|_{L^p(\Omega)} \leq |f_1|_{L^{p_1}(\Omega)} |f_2|_{L^{p_2}(\Omega)} \cdots |f_k|_{L^{p_k}(\Omega)} \text{" (Brezis, 2010, p. 93).}$$

Proposición 2.4 (**Desigualdad de Poncairé**). *"Sea Ω un conjunto abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ y $1 \leq p < \infty$. Entonces, existe una constante $C = C(\Omega, p) > 0$ tal que*

$$|u|_{L^p(\Omega)} \leq C|\nabla u|_{L^p(\Omega)} \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

La constante C es denominada la constante de Poncairé" (Brezis, 2010, p. 290).

Lema 2.13 (**Desigualdad de Gronwall**). *"Sea $z \in L^\infty(0,T)$ y $f \in L^1(0,T)$ tal que $z(t) \geq 0$, $f(t) \geq 0$ y a una constante positiva. Si*

$$f(t) \leq a + \int_0^t z(s)f(s)ds, \ \textit{para todo } t \in [0,T],$$

entonces

$$f(t) \leq a \ exp\left(\int_0^t z(s)ds\right), \ \textit{para todo } t \in [0,T]\text{" (Brezis, 1973).}$$

2.2. Marco conceptual

a) "Un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se dice ***bien regular*** si su frontera Γ es una variedad de clase C^∞ de dimensión $n-1$ y Ω está localmente de un mismo lado de Γ" (Cavalcanti y Cavalcanti, 2019, 207).

b) "Cuando una propiedad es válida en un conjunto E excepto en un subconjunto de E con medida nula, se dice que la propiedad se cumple ***casi siempre***"(Medeiros y Amancio de Mello, 2008, p. 7)

Capítulo 3

Marco Metodológíco

3.1. Hipótesis de la investigación

Hipótesis general

Existe una única solución del problema (1.5) – (1.7).

Hipótesis específicos

a) Existe una solución $u : \Omega\times]0.T[\to \mathbb{R}$ del problema (1.5) – (1.7).

b) Existe unicidad de solución del problema (1.5) – (1.7).

Además, las funciones α, a, f y g verifican las siguientes condiciones:

(H1) $a \in L^{\infty}_{+}(\Omega); a(x) \geq a_0 > 0$ casi siempre en Ω.

(H2) $f \in C^1(\mathbb{R})$ y cumple la siguiente condición de crecimiento:

$$|f(x) - f(y)| \leq C(1 + |x|^{p-1} + |y|^{p-1})|x - y|, \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}$$

para alguna constante $C > 0$ y $p > 1$ tal que $(n - 2)p \leq n$.

(H3) La función no lineal $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cumple

a) $g \in C^1(\mathbb{R})$,

b) $g(s)s \geq 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$,

c) g es una función no decreciente,

d) Existen constantes $m, M > 0$ tal que $m|s| \leq g(s) \leq M|s|$, $\forall s \in \mathbb{R}$,

e) $g' \in L^{\infty}(\mathbb{R})$.

(H4) $\alpha \in W^{1,\infty}(\Omega); \alpha(x) \geq \alpha_0 > 0$ casi siempre en Ω.

3.2. Variables e indicadores de la investigación

3.2.1. Variables

Variables dependientes

a) La deformación vertical de la onda en el punto x y el tiempo t, $u(x,t)$.

b) Las funciones reales de variable vectorial, $\alpha(x)$ y $a(x)$.

c) Las funciones reales de variable real, $g(t)$ y $f(t)$.

Variables independientes

a) Variable espacio – temporal: $(x,t) \in \Omega \times]0,T[$

b) Espacios funcionales: $L^p(\Omega)$, $H^m(\Omega)$ y $L^p(0,T;V)$.

3.2.2. Indicadores de la investigación

Variable	Dimensiones	Indicador
$u(x,t)$	Existencia	Método de Faedo–Galerkin y Teoría de semigrupo.
	Unicidad	Método de la energía.

3.3. Métodos de la investigación

El método de la investigación fue deductivo–demostrativo, iniciándose con el método de Faedo–Galerkin que consta de cuatro pasos:

1. Construcción de soluciones aproximadas en un espacio de dimensión finita.

2. Obtención de estimaciones previas para las soluciones aproximadas.

3. Convergencia de las soluciones aproximadas.

4. Verificación de los datos iniciales.

Luego, se aplicó la teoría de semigrupos lineales, que consistió escribir el problema (1.5) – (1.7) en un problema semilineal abstracto.

3.4. Diseño o esquema de la investigación

El tipo de investigación corresponde a una investigación básica y cuantitativa, en tanto su finalidad fue producir nuevos conocimientos, para ampliar y profundizar la ecuación (1.5).

El diseño utilizado fue descriptivo demostrativo pues a partir de la estimativas a priori y la teoría de semigrupos se demostró la existencia y unicidad de la solución del problema (1.5) – (1.7).

3.5. Población y muestra

Población

La población fue el conjunto de las funciones $u \in L^2(\Omega)$ cuyas derivadas distribucionales $D^\alpha u$ estan generadas por funciones $u_\alpha \in L^2(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, es decir, el Espacio de Sobolev de orden m.

Muestra

La muestra fue el conjunto de la funciones medibles $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty,$$

es decir, los espacios $L^p(\Omega)$.

3.6. Actividades del proceso investigativo

Las actividades se inició con la recopilación y análisis de la información obtenida en revista especializada y libros. Para alcanzar el objetivo de la investigación se aplicó las técnicas del analisis funcional, el método de Faedo–Galerkin, la teoría de semigrupos lineales y el método de la energía.

3.7. Técnicas e instrumentos de la investigación

Para la recolección de la información se utilizó la técnica del análisis documental dado que se revisó exhaustivamente libros, revistas especializadas y artículos científicos, que gracias a su confiabilidad nos permitieron validar los conceptos necesarios para nuestra investigación.

3.8. Procedimiento para la recolección de datos

Dado el tipo de investigación, no se hizo recolección de datos del tipo estadístico ni observaciones experimentales.

3.9. Técnicas de procesamiento y análisis de los datos

Dado que no se contó con datos estadísticos u otros que se puedan adquirir mediante observaciones experimentales, no se requirió de algún tipo de análisis ni procesamiento de datos.

Capítulo 4

Resultados y discusión

4.1. Solución regular

En la presente sección demostramos la existencia única de la solución regular para el problema (1.5) – (1.7) usando el método de Faedo-Galerkin y el método de la energía.

4.1.1. Existencia de solución regular

En esta subsección, mediante el método de Faedo-Galerkin demostramos la existencia de la solución regular del problema (1.5) – (1.7). El método consta de cuatros pasos:

1) Construcción de soluciones aproximadas en un espacio de dimensión finita.

2) Obtención de estimaciones previas para las soluciones aproximadas.

3) Convergencia de las soluciones aproximadas.

4) Verificación de los datos iniciales.

Paso 1. Construcción de las soluciones aproximadas.

Consideremos $\{w_j\}_j$ una base una ortonormal en $L^2(\Omega)$, formado por los vectores propios del operador $-\Delta$, es decir, cada vector w_j es una solución al problema espectral

$$((w_j, v)) = \lambda_j (w_j, v), \ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

La existencia de esta base está garantizada por el teorema espectral en el Análisis Espectral – Manuel Milla Miranda (Milla, 1994). Sea $V_m = [w_1, w_2, \dots, w_m]$ el subespacio $m-$ dimensional del espacio $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ generador por los primeros m vectores de la base

$\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. El problema aproximado consiste en encontrar funciones $u_m(t) \in V_m$ tal que

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} h_{im}(t) w_i(x)$$

donde los $h_{im}(t)$ son soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} (u_m'', v) + (\nabla u_m, \nabla v) + (\alpha(\cdot) u_m, v) + (f(u_m), v) + (a(\cdot) g(u_m'), v) = 0, \ \forall v \in V_m, \\ u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \text{ en } H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \\ u_m'(0) = u_{1m} \to u_1 \text{ en } H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{4.1}$$

Las convergencias anteriores tienen sentido, ya que el conjunto formado por las combinaciones lineales de elementos de V_m son densos en $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Por el teorema 2.8, el problema aproximado (4.1) tiene una solución local en todo el intervalo $[0, t_m]$, con $t_m < T$. Además, esta solución puede ser extendido a todo intervalo $[0, T]$ como consecuencia de las estimativas a priori que veremos a continuación

Paso 2. Estimativas apriori.

Primera estimativas apriori. Considerando $v = u_m'(t) \in V_m$ en la primera fila de (4.1), obtenemos

$$(u_m''(t), u_m'(t)) + (\nabla u_m(t), \nabla u_m'(t)) + (\alpha(\cdot) u_m(t), u_m'(t)) + (f(u_m(t)), u_m'(t)) + (a(\cdot) g(u_m'(t)), u_m'(t)) = 0,$$

es decir,

$$\frac{d}{dt}\left(|u_m'(t)|^2 + |\nabla u_m(t)|^2 + |\alpha^{1/2}(\cdot) u_m(t)|^2 + \int_\Omega F(u_m(t)) dx \right) + 2 \int_\Omega a(x) g(u_m'(t)) u_m'(t) dx = 0.$$

De la hipótesis (H1) y (H3)(b) resulta

$$\frac{d}{dt}\left(|u_m'(t)|^2 + |\nabla u_m(t)|^2 + |\alpha^{1/2}(\cdot) u_m(t)|^2 + \int_\Omega F(u_m(t)) dx \right) \leq 0.$$

Integrando de 0 a t obtenemos

$$\begin{aligned} |u_m'(t)|^2 + |\nabla u_m(t)|^2 + |\alpha^{1/2}(\cdot) u_m(t)|^2 + \int_\Omega F(u_m(t)) dx &\leq |u_m'(0)|^2 \\ &+ |\nabla u_m(0)|^2 + |\alpha^{1/2}(\cdot) u_m(0)|^2 + \int_\Omega F(u_m(0)) dx. \end{aligned}$$

De las convergencias

$$u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \text{ en } H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \text{ y } u_m'(0) = u_{1m} \to u_1 \text{ en } H_0^1(\Omega)$$

existe una constante $C_1 > 0$ independiente de t y m tal que

$$|u_{1m}|^2 + |\nabla u_{0m}|^2 + |\alpha^{1/2}(\cdot)u_{0m}|^2 \leq C_1. \tag{4.2}$$

Por otro lado, de la hipótesis (H2), de (4.2) y la inmersión

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega),\ p+1 \leq \frac{2n}{n-2},$$

existe una constante $C_2 > 0$ independiente de t y m tal que

$$\int_\Omega F(u_m(0))dx = \int_\Omega \int_0^{u_m(0)} f(s)dsdx \leq C\int_\Omega \left(\frac{1}{2}|u_{0m}|^2 + \frac{1}{p+1}|u_{0m}|^{p+1}\right)dx \leq C_2.$$

Por lo tanto,

$$|u_m'(t)|^2 + |\nabla u_m(t)|^2 + |\alpha^{1/2}(\cdot)u_m(t)|^2 + \int_\Omega F(u_m(t))dx \leq C_3 \quad \forall\ t \in [0,T] \tag{4.3}$$

donde la constante C_3 es independiente de t y m. Luego, por el teorema 2.10, podemos extender la solución aproximada $u_m(t)$ a todo el intervalo $[0,T]$.
Mas aún, de la desigualdad (4.3) obtenemos

$$(u_m') \text{ es acotada en } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{4.4}$$

y

$$(u_m) \text{ es acotada en } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{4.5}$$

Segunda Estimativa a Priori. Al derivar con respecto a t la primera fila de la ecuación aproximada (4.1), se obtiene

$$(u_m'''(t),v)+(\nabla u_m'(t),\nabla v)+(\alpha(\cdot)u_m'(t),v)+(f'(u_m(t))u_m'(t),v)+(a(\cdot)g'(u_m'(t))u_m''(t),v) = 0.$$

Considerando $v = u_m''(t) \in V_m$ obtenemos

$$\begin{aligned}(u_m'''(t),u_m''(t)) + (\nabla u_m'(t),\nabla u_m''(t)) + (\alpha(\cdot)u_m'(t),u_m''(t)) + (f'(u_m(t))u_m'(t),u_m''(t))\\ +\ (a(\cdot)g'(u_m'(t))u_m''(t),u_m''(t)) = 0,\end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(|u_m''(t)|^2 + |\nabla u_m'(t)|^2 + |\alpha^{1/2}(\cdot)u_m'(t)|^2\right) + 2\int_\Omega f'(u_m(t))u_m'(t)u_m''(t))dx\\ +\ 2\int_\Omega a(x)g'(u_m'(t))|u_m'(t)|^2dx = 0.\end{aligned} \tag{4.6}$$

De la hipótesis (H.2) y la desigualdad de Hölder generalizada tenemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f'(u_m(t))u_m'(t)u_m''(t))dx &\leq \int_\Omega |f'(u_m(t))||u_m'(t)||u_m''(t)|dx \\
&\leq \int_\Omega C\left(1+|u_m(t)|^{p-1}\right)|u_m'(t)||u_m''(t)|dx \\
&= C\left(\int_\Omega |u_m'(t)||u_m''(t)|dx + \int_\Omega |u_m(t)|^{p-1}|u_m'(t)||u_m''(t)|dx\right) \\
&\leq C\left(|u_m'(t)||u_m''(t)| + |u_m(t)|^{p-1}_{L^{2p}(\Omega)}|u_m'(t)|_{L^{2p}(\Omega)}|u_m''(t)|\right).
\end{aligned}$$

De las inmersiones Sobolev

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega) \hookrightarrow L^{2p}(\Omega), \quad 2p \leq \frac{2n}{n-2}$$

y de (4.4) – (4.5) resulta

$$\int_\Omega f'(u_m(t))u_m'(t)u_m''(t))dx \leq C_4|u_m''(t)| + C_5|\nabla u_m'(t)||u_m''(t)|.$$

De la desigualdad $2ab \leq a^2 + b^2$ se concluye

$$\int_\Omega f'(u_m(t))u_m'(t)u_m''(t))dx \leq C_6|u_m''(t)|^2 + C_7|\nabla u_m'(t)|. \tag{4.7}$$

Además, por la hipótesis (H1) y (H3) (c), resulta que $g'(s) \geq 0$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Luego

$$\int_\Omega a(x)g'(u_m'(t))|u_m'(t)|^2dx \geq 0. \tag{4.8}$$

Reemplazando (4.7) y (4.8) en (4.6) obtenemos

$$\frac{d}{dt}\left(|u_m''(t)|^2 + |\nabla u_m'(t)|^2 + |\alpha^{1/2}(\cdot)u_m'(t)|^2\right) \leq C_6|u_m''(t)|^2 + C_7|\nabla u_m'(t)|^2. \tag{4.9}$$

Ahora, integrando ambos lados de la desigualdad (4.9) desde de 0 a t, $t \in [0,T]$, obtenemos

$$\begin{aligned}
|u_m''(t)|^2 + |\nabla u_m'(t)|^2 + |\alpha^{1/2}(\cdot)u_m'(t)|^2 &\leq |u_m''(0)|^2 + |\nabla u_{1m}|^2 \\
&+ |\alpha^{1/2}(\cdot)u_{1m}|^2 + C_8\int_0^t \left(|u_m''(\tau)|^2 + |\nabla u_m'(\tau)|^2\right)d\tau.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

En lo que sigue vamos a acotar la sucesión $(u_m''(0))_{m\in\mathbb{N}}$. Considerando $v = u_m''(0) \in V_m$ en la primera fila de (4.1), obtenemos

$$(u_m''(0), u_m''(0)) + (\nabla u_{0m}, \nabla u_m''(0)) + (\alpha(\cdot)u_{0m}, u_m''(0)) + (f(u_{0m}), u_m''(0)) + (a(\cdot)g(u_{1m}), u_m''(0)) = 0.$$

Por la fórmula de Green

$$|u_m''(0)| - (\Delta u_{0m}, u_m''(0)) + (\alpha(\cdot)u_{0m}, u_m''(0)) + (f(u_{0m}), u_m''(0)) + (a(\cdot)g(u_{1m}), u_m''(0)) = 0.$$

De la observación 2.4 y simplificando resulta

$$|u''_m(0)| \leq |\Delta u_m(0)|_{L^2(\Omega)} + |\alpha|_{L^\infty(\Omega)}|u_{0m}| + |f(u_{0m})| + |a|_{L^\infty(\Omega)}|g(u_{1m})|.$$

Luego

$$|u''_m(0))| \leq |u_{0m}|_{H^2(\Omega)} + |\alpha|_{L^\infty(\Omega)}|u_{0m}| + |f(u_{0m})| + |a|_{L^\infty(\Omega)}|g(u_{1m})|.$$

De la acotación de la sucesión $(u_{0m})_{m\in\mathbb{N}}$ en $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, resulta

$$|u''_m(0)|_{L^2(\Omega)} \leq C_9 + C_{10}|\alpha|_{L^\infty(\Omega)} + |f(u_{0m})| + |a|_{L^\infty(\Omega)}|g(u_{1m})|. \tag{4.11}$$

De la hipótesis (H.2) y la inmersión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2p}(\Omega)$, obtenemos

$$\begin{aligned} |f(u_{0m})|^2 = \int_\Omega |f(u_{0m})|^2 dx &\leq C \int_\Omega (|u_{0m}| + |u_{0m}|^p)^2 \, dx \\ &\leq 2C \int_\Omega \left(|u_{0m}|^2 + |u_{0m}|^{2p} \right) dx \\ &\leq 2C \left(|u_{0m}|^2_{L^2(\Omega)} + |u_{0m}|^{2p}_{L^{2p}(\Omega)} \right) \\ &\leq 2C \left(|u_{0m}|^2_{L^2(\Omega)} + \tilde{C}|\nabla u_{0m}|^{2p}_{L^2(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

De (4.2), existe una constante $C_{11} > 0$ tal que

$$|f(u_m(0))| \leq C_{11}. \tag{4.12}$$

Por otro lado, de la hipótesis (H.3)(d) y de la convergencia $u'_m(0) = u_{1m} \to u_1$ en $H_0^1(\Omega)$ obtenemos

$$|g(u_{1m})| = \left(\int_\Omega |g(u_{1m})|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq M \left(\int_\Omega |u_{1m}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_{12}|u_{1m}|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_{13}. \tag{4.13}$$

De (4.11) – (4.13), resulta que la sucesión $(u''_m(0))_{m\in\mathbb{N}}$ es acotada en $L^2(\Omega)$. Mas aún, de la tercera fila de (4.1), la sucesión $(\nabla u_{1m})_{m\in\mathbb{N}}$ es acotada en el espacio $L^2(\Omega)$. Por lo tanto, existe una constante $C_{14} > 0$ tal que

$$|u''_m(0)|^2 + |\nabla u_{1m}|^2 + |\alpha^{1/2}(\cdot)u_{1m}|^2 \leq C_{14}. \tag{4.14}$$

De (4.10) y la desigualdad (4.14) resulta

$$|u''_m(t)|^2 + |\nabla u'_m(t)|^2 + |\alpha^{1/2}(\cdot)u'_m(t)|^2 \leq C_{14} + C_8 \int_0^t \left(|u''_m(\tau)|^2 + |\nabla u'_m(\tau)|^2 \right) d\tau.$$

Por la desigualdad de Gronwall, obtenemos

$$|u''_m(t)|^2 + |\nabla u'_m(t)|^2 \leq C_{15}, \quad \forall \; t \in [0,T], \; \forall m \in \mathbb{N}.$$

Mas aún

$$(u''_m) \text{ es acotada en } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{4.15}$$

y

$$(\nabla u'_m) \text{ es acotada en } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{4.16}$$

Paso 3. Convergencia de las soluciones aproximadas

Como los espacios $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ y $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ son separables, de las estimativas a priori y del teorema 2.2, existe una subsucesión (u_m) (denotada de la misma forma) y funciones u, ξ y ϕ tal que

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ en } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{4.17}$$

$$u_m' \overset{*}{\rightharpoonup} \xi \text{ en } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{4.18}$$

y

$$u_m'' \overset{*}{\rightharpoonup} \phi \text{ en } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{4.19}$$

Por la cadena de inmersiones

$$\begin{aligned} D(0,T;H_0^1(\Omega)) &\hookrightarrow L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \\ \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega)) &\equiv \left[L^2(0,T;L^2(\Omega))\right]' \hookrightarrow D'(0,T;L^2(\Omega)) \end{aligned}$$

y unicidad de límite, resulta $\varphi = u'$ y $\phi = u''$.
De la inmersión compacta $H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$ y en virtud al teorema de Aubin-Lions, podemos extraer una subsucesión de (u_m) y de (u_m') la cual será denotada de la misma forma, de modo que

$$u_m \to u \text{ en } L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q)$$

y

$$u_m' \to u' \text{ en } L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q),$$

donde $Q = \Omega \times (0,T)$. Luego,

$$u_m \to u \text{ casi siempre en } Q \tag{4.20}$$

y

$$u_m' \to u' \text{ casi siempre en } Q.$$

De la continuidad de la funciones f y g resulta

$$f(u_m) \to f(u) \text{ casi siempre en } Q \tag{4.21}$$

y

$$g(u_m') \to g(u') \text{ casi siempre en } Q. \tag{4.22}$$

Afirmación 4.1.

$$f(u_m) \overset{*}{\rightharpoonup} f(u) \ \ en \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

En efecto, de la hipótesis (H2) y $f(0)=0$, resulta

$$\begin{aligned} |f(u_m)|^2_{L^2(Q)} &= \int_0^T\int_\Omega |f(u_m(x,t))|^2 dxdt \\ &\leq 2C\int_0^T\int_\Omega \left(|u_m(x,t)|^2+|u_m(x,t)|^{2p}\right)dxdt \\ &\leq 2C\left(|u_m|^2_{L^2(Q)}+|u_m|^{2p}_{L^{2p}(Q)}\right). \end{aligned}$$

De la inmersión

$$L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^{2p}(0,T;L^{2p}(\Omega))$$

y (4.5), existe una constante $C_{16}>0$ tal que

$$|f(u_m)|_{L^2(Q)} \leq C_{16}, \quad \forall m\in\mathbb{N}. \tag{4.23}$$

De (4.21), (4.23) y el lema de Lions, se obtiene

$$f(u_m) \rightharpoonup f(u) \text{ en } L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q). \tag{4.24}$$

Por otro lado, de la hipótesis (H2) y de la inmersión $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^{2p}(\Omega)$ se obtiene

$$\begin{aligned} |f(u_m(t))|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega |f(u_m(x,t))|^2 dx \\ &\leq 2C\int_\Omega \left(|u_m(x,t)|^2+|u_m(x,t)|^{2p}\right)dxdt \\ &\leq 2C\left(|u_m(t)|^2_{L^2(\Omega)}+|\nabla u_m(t)|^{2p}_{L^2(\Omega)}\right). \end{aligned}$$

De (4.5) se obtiene

$$\sup_{0<t<T} \text{ess}\, |f(u_m(t))|_{L^2(\Omega)} \leq C_{17}.$$

Luego, la sucesión $(f(u_m))_{m\in\mathbb{N}}$ es acotada en el espacio $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Por lo tanto, existe una subsucesión $(f(u_m))_{m\in\mathbb{N}}$ (denotada de la misma manera) tal que

$$f(u_m) \overset{*}{\rightharpoonup} \psi \text{ en } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Por lo tanto,

$$f(u_m) \rightharpoonup \psi \text{ en } L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

De (4.24) y unicidad de límite en $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, concluimos

$$f(u_m) \overset{*}{\rightharpoonup} f(u) \text{ en } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Afirmación 4.2.

$$a(\cdot)g(u_m'(t)) \overset{*}{\rightharpoonup} a(\cdot)g(u'(t)) \ \ en \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

En efecto, de la convergencia (4.22)

$$a(\cdot)g(u_m') \to a(\cdot)g(u') \text{ casi siempre en } Q. \tag{4.25}$$

De la hipótesis (H1), (H3)(d) y (4.4) se obtiene

$$\begin{aligned} |a(\cdot)g(u_m')|^2_{L^2(Q)} &= \int_0^T \int_\Omega |a(x)g(u_m'(x,t))|^2 dxdt \\ &\leq M \int_0^T \int_\Omega |a(x)|^2 |u_m'(x,t)|^2 dxdt \\ &\leq M|a|^2_{L^\infty(\Omega)} |u_m'|^2_{L^2(Q)} < \infty. \end{aligned} \tag{4.26}$$

De (4.25), (4.26) y el lema de Lions resulta

$$a(\cdot)g(u_m') \rightharpoonup a(\cdot)g(u') \text{ en } L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q). \tag{4.27}$$

De la hipótesis (H1), (H3)(d) y (4.4) obtenemos

$$\sup_{0<t<T} \text{ess}\, |a(\cdot)g(u_m'(t))|_{L^2(\Omega)} \leq M|a|_{L^\infty(\Omega)} \sup_{0<t<T} \text{ess}\, |u_m'(t)|_{L^2(\Omega)} \leq C_{18}.$$

Luego, la sucesión $(a(\cdot)g(u_m'(t))_{m\in\mathbb{N}}$ es acotada en $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Por lo tanto, existe una subsucesión $(a(\cdot)g(u_m'(t))))_{m\in\mathbb{N}}$ (denotada de la misma manera) tal que

$$a(\cdot)g(u_m'(t)) \overset{*}{\rightharpoonup} \eta \text{ en } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Por lo tanto,

$$a(\cdot)g(u_m'(t)) \rightharpoonup \eta \text{ en } L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

De (4.27) y unicidad de límite en $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, concluimos

$$a(\cdot)g(u_m'(t))) \overset{*}{\rightharpoonup} a(\cdot)g(u'(t))) \text{ en } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Afirmación 4.3.

$$\alpha(\cdot)u_m \overset{*}{\rightharpoonup} \alpha(\cdot)u \ \ en \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

En efecto, de la convergencia (4.20), resulta

$$\alpha(\cdot)u_m \to \alpha(\cdot)u \text{ casi siempre en } Q. \tag{4.28}$$

De la hipótesis (H4) y (4.4) obtenemos

$$\begin{aligned} |\alpha(\cdot)u_m|^2_{L^2(Q)} &= \int_0^T \int_\Omega |\alpha(x)u_m(x,t)|^2 dxdt \\ &\leq \int_0^T \int_\Omega |\alpha(x)|^2 |u_m(x,t)|^2 dxdt \\ &\leq |\alpha|^2_{L^\infty(\Omega)}|^2 |u_m|^2_{L^2(Q)} < \infty. \end{aligned} \tag{4.29}$$

De (4.28), (4.29) y el lema de Lions se obtiene

$$\alpha(\cdot)u_m \rightharpoonup \alpha(\cdot)u \text{ en } L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q). \tag{4.30}$$

De la hipótesis (H4) y (4.5) obtenemos

$$\sup_{0<t<T} \text{ess}\, |\alpha(\cdot)u_m(t)|_{L^2(\Omega)} \leq M|\alpha|_{L^\infty(\Omega)} \sup_{0<t<T} \text{ess}\, |u_m(t)|_{L^2(\Omega)} \leq C_{19}.$$

Luego, la sucesión $(\alpha(\cdot)u_m(t))_{m\in\mathbb{N}}$ es acotada en $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Por lo tanto, existe una subsucesión $(\alpha(\cdot)u_m(t))_{m\in\mathbb{N}}$ (denotada de la misma manera) tal que

$$\alpha(\cdot)u_m(t) \overset{*}{\rightharpoonup} \eta \text{ en } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Por lo tanto,

$$\alpha(\cdot)u'_m(t) \rightharpoonup \eta \text{ en } L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

De (4.30) y unicidad de límite en $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, concluimos

$$\alpha(\cdot)u_m(t) \overset{*}{\rightharpoonup} \alpha(\cdot)u'(t) \text{ en } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

De las afirmaciones 4.1, 4.2 y 4.3, para $v \in H_0^1(\Omega)$ y $\gamma \in D(0,T) \hookrightarrow L^2(0,T) \hookrightarrow L^1(0,T)$, resulta

$$\int_0^T (a(\cdot)g(u'_m(t)),v)\,\gamma(t)dt \to \int_0^T (a(\cdot)g(u'(t)),v)\,\gamma(t)dt, \tag{4.31}$$

$$\int_0^T (f(u'_m(t)),v)\,\gamma(t)dt \to \int_0^T (f(u'(t)),v)\,\gamma(t)dt, \tag{4.32}$$

y

$$\int_0^T (\alpha(\cdot)u_m(t),v)\,\gamma(t)dt \to \int_0^T (\alpha(\cdot)u(t),v)\,\gamma(t)dt. \tag{4.33}$$

Por otro lado, de (4.19) resulta

$$\langle u''_m, \psi\rangle \to \langle u'', \psi\rangle, \text{ para todo } \psi \in L^1(0,T;L^2(\Omega)),$$

es decir,

$$\int_0^T (u''_m(t),\psi(t))\,dt \to \int_0^T (u''(t),\psi(t))\,dt.$$

En particular para $\psi = v\gamma \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ se obtiene

$$\int_0^T (u_m''(t),v)\,\gamma(t)dt \to \int_0^T (u''(t),v)\,\gamma(t)dt. \tag{4.34}$$

De (4.17)

$$\langle \nabla u_m, \psi\rangle \to \langle \nabla u, \psi\rangle, \text{ para todo } \psi \in L^1\left(0,T;\left[L^2(\Omega))\right]^n\right),$$

es decir,

$$\int_0^T (\nabla u_m(t), \nabla\psi)_{[L^2(\Omega))]^n}\,dt \to \int_0^T (\nabla u(t), \nabla\psi)_{[L^2(\Omega))]^n}\,dt$$

En particular para $\psi = \gamma\ \nabla v \in L^1\left(0,T;[L^2(\Omega))]^n\right)$ resulta

$$\int_0^T (\nabla u_m(t), \nabla v)_{[L^2(\Omega))]^n}\,\gamma(t)dt \to \int_0^T (\nabla u(t), \nabla w_j)_{[L^2(\Omega))]^n}\,\gamma(t)dt. \tag{4.35}$$

Afirmación 4.4. La función u obtenida verifica el problema (1.5).

En efecto, multiplicando la primera fila de la ecuación aproximada (4.1) por $\gamma \in D(0,T)$ e integrando desde 0 hasta T

$$\int_0^T (u_m''(t),v)\gamma(t)dt + \int_0^T (\nabla u_m(t),\nabla v)\gamma(t)dt + \int_0^T (\alpha(\cdot)u_m(t),v)\gamma(t)dt$$
$$+\int_0^T (f(u_m(t)),v)\gamma(t)dt + \int_0^T (a(\cdot)g(u_m'(t)),v)\gamma(t)dt = 0.$$

De las convergencias (4.31), (4.32), (4.33) (4.34) y (4.35) resulta

$$\int_0^T (u''(t),v)\gamma(t)dt + \int_0^T (\nabla u(t),\nabla v)\gamma(t)dt + \int_0^T (\alpha(\cdot)u(t),v)\gamma(t)dt + \int_0^T (f(u(t)),v)\gamma(t)dt$$
$$+\int_0^T (a(\cdot)g(u'(t)),v)\gamma(t)dt = 0,\ \forall v \in V_m,\ \forall\theta \in D(0,T).$$

De la totalidad del conjunto $\{w_j;\ j\in\mathbb{N}\}$ en $H_0^1(\Omega)$ resulta

$$\int_0^T (u''(t),v)\theta(t)dt + \int_0^T (\nabla u(t),\nabla v)\theta(t)dt + \int_0^T (\alpha(\cdot)u(t),v)\theta(t)dt + \int_0^T (f(u(t)),v)\theta(t)dt$$
$$+\int_0^T (a(\cdot)g(u'(t)),v)\theta(t)dt = 0,\ \forall v \in H_0^1(\Omega),\ \forall\theta \in D(0,T).$$

en el sentido de las distribuciones $D(0,T)$. Luego,

$$u'' - \Delta u + \alpha(x)u + \ f(u) + a(x)g(u') = 0 \text{ en } D'((0,T)\times\Omega)). \tag{4.36}$$

Desde que u'', $\alpha(\cdot)u$, $f(u)$, $a(\cdot)g(u') \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ resulta

$$\Delta u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Por tanto, de (4.36) se obtiene

$$u'' - \Delta u + \alpha(x)u + \ f(u) + a(x)g(u') = 0 \text{ en } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Por el teorema de regularidad para problemas elípticos y la condición (1.6), obtenemos

$$u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)),\ \forall\ T>0.$$

Paso 4. Verificación de los datos iniciales.

De (4.17), (4.18) y (4.19) tenemos

$$u,\ u' \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$$

y

$$u'' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Por el lema 2.1

$$u \in C^0([0,T];H_0^1(\Omega)) \text{ y } u' \in C^0([0,T];L^2(\Omega)),$$

es decir, tiene sentido calcular $u(0)$, $u(T)$, $u'(0)$ y $u'(T)$.

De (4.18) y la inmersión $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ resulta

$$\langle u'_\mu,\varphi\rangle \to \langle u',\varphi\rangle,\ \forall \varphi \in L^1(0,T;L^2(\Omega)),$$

es decir,

$$\int_0^T (u'_m(t),\gamma)dt \to \int_0^T (u'(t),\gamma)dt,\ \forall \gamma \in L^1(0,T;L^2(\Omega)).$$

Afirmación 4.5. Se cumple

$$u(0) = u_0.$$

En efecto, sea $\theta \in C^0([0,T])$ con $\theta(0) = 1$ y $\theta(T) = 1$. Para $\gamma = v\theta \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, resulta

$$\int_0^T (u'_m(t),v)\theta(t)dt \to \int_0^T (u'(t),v\theta(t)dt.$$

Integrando por partes, obtenemos

$$-(u_m(0),v) - \int_0^T (u_m(t),v)\theta'(t)dt \to -(u(0),v) - \int_0^T (u(t),v)\theta'(t)dt.$$

Luego

$$(u_m(0),v) \to (u(0),v),\ \forall v \in V_n$$

Por densidad resulta

$$u_m(0) \rightharpoonup u(0) \text{ en } H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega).$$

Por otro lado, del problema aproximado, tenemos

$$u_m(0) \rightharpoonup u_0 \text{ en } H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega).$$

De la unicidad de límite, concluimos

$$u(0) = u_0.$$

Afirmación 4.6. Se cumple

$$u'(0) = u_1.$$

En efecto, para $0 < \delta < T$, consideremos la función

$$\theta_\delta(t) = \begin{cases} -\dfrac{t}{\delta} + 1 & \text{si } 0 \le t \le \delta, \\ 0 & \text{si } \delta < t \le T. \end{cases}$$

que pertenece a $H_0^1(0,T)$. Multiplicando la primera fila de la ecuación aproximada (4.1) por θ_δ e integrando desde 0 hasta T, obtenemos

$$\int_0^T (u_m''(t), v)\theta_\delta(t)dt + \int_0^T (\nabla u_m(t), \nabla v)\theta_\delta(t)dt + \int_0^T (\alpha(\cdot)u_m(t), v)\theta_\delta(t)dt$$
$$+ \int_0^T (f(u_m(t)), v)\theta_\delta(t)dt + \int_0^T (a(\cdot)g(u_m'(t)), v)\theta_\delta(t)dt = 0, \ \forall v \in V_n.$$

Teniendo en cuenta la densidad y las convergencias (4.31), (4.32), (4.33), (4.34) y (4.35) obtenemos

$$\int_0^T (u''(t), v)\theta_\delta(t)dt + \int_0^T (\nabla u(t), \nabla v)\theta_\delta(t)dt + \int_0^T (\alpha(\cdot)(u(t), v)\theta_\delta(t)dt$$
$$+ \int_0^T (f(u(t)), v)\theta_\delta(t)dt + \int_0^T (a(\cdot)g(u'(t)), v)\theta_\delta(t)dt = 0, \ \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Integrando por partes la primera integral resulta

$$-(u_1, v) + \frac{1}{\delta}\int_0^\delta (u''(t), v)dt + \int_0^\delta (\nabla u(t), \nabla v)\theta_\delta(t)dt + \int_0^\delta (\alpha(\cdot)u(t), v)\theta_\delta(t)dt$$
$$+ \int_0^\delta (f(u(t)), v)\theta_\delta(t)dt + \int_0^\delta (a(\cdot)g(u'(t)), v)\theta_\delta(t)dt = 0.$$

Cuando $\delta \to 0$, obtenemos

$$(u_1, v) = (u'(0), v), \ \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega),$$

es decir,

$$u'(0) = u_1.$$

4.1.2. Unicidad de la solución regular

Sean u y v soluciones regulares del problema (1.5) – (1.7), considerando $w = u - v$ tenemos que w cumple el siguiente problema:

$$\begin{cases} w'' - \Delta w + \alpha(x)w + f(u) - f(v) + a(x)\left(g(u') - g(v')\right) = 0 & \text{en } L^\infty(0,T; L^2(\Omega)), \\ w = 0 & \text{en } \Gamma \times [0, +\infty[, \\ w(x,0) = w_t(x,0) = 0, & x \in \Omega. \end{cases} \tag{4.37}$$

Multiplicando la primera fila de (4.37) por w'

$$(w''(t), w'(t)) + (-\Delta w(t), w'(t)) + (\alpha(\cdot)w(t), w'(t)) + (f(u(t)) - f(v(t)), w'(t))$$
$$+ \left(a(\cdot)\left(g(u'(t)) - g(v'(t)\right), w'(t)\right) = 0.$$

Por hipótesis (H3) (c) y $a \in L^\infty_+(\Omega)$ se obtiene

$$(w''(t), w'(t)) + (-\Delta w(t), w'(t)) + (\alpha(\cdot)w(t), w'(t)) + (f(u(t)) - f(v(t)), w'(t)) \leq 0.$$

Integrando sobre Ω obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\left(|w'|^2_{L^2(\Omega)} + |\alpha^{1/2}(\cdot)w|^2_{L^2(\Omega)} + |\nabla w|^2_{L^2(\Omega}\right) \leq 2\int_\Omega |f(u(t)) - f(v(t))||w'|dx. \qquad (4.38)$$

De la integral del segundo miembro de (4.38) y de la hipótesis (H2), se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f(u) - f(v)||w'|dx &\leq C\int_\Omega \left(1 + |u|^{p-1} + |v|^{p-1}\right)|u - v||w'|dx \\
&= C\int_\Omega \left(1 + |u|^{p-1} + |v|^{p-1}\right)|w||w'|dx \\
&= C\left(\int_\Omega |w||w'|dx + \int_\Omega |u|^{p-1}|w||w'|dx + \int_\Omega |v|^{p-1}|w||w'|dx\right).
\end{aligned}$$

Como $\dfrac{p-1}{2p} + \dfrac{1}{2p} + \dfrac{1}{2} = 1$, por la desigualdad de Hölder generalizada se tiene

$$\int_\Omega |f(u) - f(v)||w'|dx \leq C\left(|w||w'| + |u|^{p-1}_{L^{2p}(\Omega)}|w|_{L^{2p}(\Omega)}|w'| + |v|^{p-1}_{L^{2p}(\Omega)}|w|_{L^{2p}(\Omega)}|w'|dx\right).$$

De la inmersión de Sobolev $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^{2p}(\Omega)$ y desigualdad de Poincaré resulta

$$\int_\Omega |f(u) - f(v)||w'|dx \leq C_{20}(1 + m(t))|\nabla w||w'|$$

donde $m(t) = |u|^{p-1}_{L^{2p}(\Omega)} + |v|^{p-1}_{L^{2p}(\Omega)}$.

Usando la desigualdad $2ab \leq a^2 + b^2$ obtenemos

$$\int_\Omega |f(u) - f(v)||w'|dx \leq \widehat{C}(1 + m(t))\left(|\nabla w|^2 + |w'|\right). \qquad (4.39)$$

De las desigualdades (4.38) y (4.39) se tiene

$$\frac{d}{dt}\left(|w'(t)|^2 + |\nabla w(t)|^2 + |\alpha^{1/2}(\cdot)w(t)|^2\right) \leq \widehat{C}(1 + m(t))\left(|\nabla w(t)|^2 + |w'(t)|^2\right).$$

Integrando desde 0 hasta t se tiene

$$|w'(t)|^2 + |\nabla w(t)|^2 + |\alpha^{1/2}(\cdot)w(t)|^2 \leq \widehat{C}\int_0^t (1 + m(t))\left(|\nabla w|^2 + |w'|^2\right)dt.$$

Por la desigualdad de Gronwall, resulta

$$|w'(t)|^2 + |\nabla w(t)|^2 + |\alpha^{1/2}(\cdot)w(t)|^2 \leq 0$$

para todo $t \in [0,T]$, lo que demuestra que

$$w(t) \equiv 0 \text{ en } H_0^1(\Omega) \quad \forall t \in [0,T].$$

Por lo tanto, $u = v$, es decir, la solución regular es única.

En resumen se ha demostramos el siguiente

Teorema 4.1. *Dado $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ y $u_1 \in H_0^1(\Omega)$, existe únicamente una solución regular del problema (1.5) – (1.7) satisfaciendo*

$$u \in L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)),\ u' \in L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega)),\ u'' \in L^\infty(0,T,L^2(\Omega)).$$

4.2. Solución débil

En la presente sección utilizando la teoría de semigrupos de operadores lineales, demostramos que existe únicamente una solución débil para el problema (1.5) – (1.7).

Considerando $v = u_t$ podemos reescribimos el sistema (1.5) – (1.7) en la forma

$$\begin{cases} u_t - v & = 0 \\ v_t - \Delta u + \alpha(x)u & = -f(u) - a(x)g(v). \end{cases} \tag{4.40}$$

Escribiendo $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ y considerando $\mathcal{A}$ el operador definido por

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ (-\Delta + \alpha(\cdot))\, I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ -\Delta u + \alpha(\cdot) v \end{pmatrix} \tag{4.41}$$

el sistema (4.40) se puede representar mediante la ecuación

$$\frac{dU}{dt} + \mathcal{A}U = F(U) \tag{4.42}$$

donde el operador $F : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ está definido por

$$F(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ -f(u) - a(\cdot)g(v) \end{pmatrix}, \text{ para todo } U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathcal{H}.$$

El espacio $\mathcal{H}$ se define

$$\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

dotado con el producto interno

$$\langle U_1, U_2 \rangle_{\mathcal{H}} = (\nabla u_1, \nabla u_2)_{L^2(\Omega)} + (\alpha(\cdot)u_1, u_2)_{L^2(\Omega)} + (v_1, v_2)_{L^2(\Omega)}\,,\ \forall\ U_1, U_2 \in \mathcal{H}$$

y norma inducida

$$\|U\|_{\mathcal{H}} = |\nabla u|_{L^2(\Omega)} + |\alpha(\cdot)u|_{L^2(\Omega)} + |v|_{L^2(\Omega)}$$

hace de $\mathcal{H}$ un espacio de Banach.

El operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ dado por (4.41) tiene como dominio

$$D(\mathcal{A}) = \Big(H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\Big) \times H_0^1(\Omega).$$

Observación 4.1. De las inmersiones

$$\Big(H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\Big) \overset{c}{\hookrightarrow} H_0^1(\Omega) \text{ y } H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$$

resulta que $D(\mathcal{A})$ es denso en $\mathcal{H}$.

Lema 4.1. *$\mathcal{A}$ es mónotono.*

Demostración. Para $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A})$ y la definición del operador $\mathcal{A}$ resulta

$$\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} \quad = \quad \langle \begin{pmatrix} -v \\ -\Delta u + \alpha(\cdot)v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rangle_{\mathcal{H}}.$$

De la definición de producto interno en $\mathcal{H}$ se obtiene

$$\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} \quad = \quad \int_\Omega [-\nabla v \cdot \nabla u - \alpha(x)vu + ((-\Delta u) + \alpha(x)u)v]dx.$$

Aplicando la fórmula de Green y simplificando, resulta

$$\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} \geq 0.$$

Por lo tanto, el operador, $\mathcal{A}$ es mónotono. □

Lema 4.2. *$\mathcal{A}$ es maximal.*

Demostración. Dado $G = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ debemos demostrar que existe únicamente una solución $U \in D(\mathcal{A})$ tal que

$$U + \mathcal{A}U = G. \tag{4.43}$$

De las definiciones de $\mathcal{A}$, U y $\mathcal{F}$, la ecuación (4.43) se puede transformar en el sistema

$$\begin{cases} u - v = f & \text{en } \Omega, \\ v - \Delta u + \alpha(\cdot) = g & \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{4.44}$$

Afirmación 4.7. El sistema (4.44) tiene una solución $(u;v)$ tal que $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ y $v \in H_0^1(\Omega)$.

En efecto, resolviendo el sistema (4.44), es decir, considerando $v = 2u - f$ resulta en u debe satisfacer

$$-\Delta u + (\alpha(\cdot) + 1)u = f + g. \tag{4.45}$$

Demostremos ahora que (4.45) admite una sola solución $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Para esto, vamos a definir la forma bilineal

$$a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

dada por

$$a(u,v) = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} + ((\alpha(\cdot)+1)u, v)_{L^2(\Omega)}. \tag{4.46}$$

Observación 4.2. $a(u,v)$ es continua.

En efecto, sea $u, v \in H_0^1(\Omega)$, entonces

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq |\nabla u|_{L^2(\Omega)} |\nabla v|_{L^2(\Omega)} + (1 + |\alpha|_\infty)|u|_{L^2(\Omega)}|v|_{L^2(\Omega)} \\ &= |u|_{H_0^1(\Omega)}|v|_{H_0^1(\Omega)} + (1+|\alpha|_\infty)|u|_{L^2(\Omega)}|v|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{4.47}$$

De la inmersión $H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$, existe una constante $\widehat{C} > 0$ tal que

$$|u|_{L^2(\Omega)} \leq \widehat{C}|u|_{H_0^1(\Omega)}, \text{ para todo } u \in H_0^1(\Omega). \tag{4.48}$$

De (4.47) y (4.48) obtenemos

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq |u|_{H_0^1(\Omega)}|v|_{H_0^1(\Omega)} + \widehat{C}^2 \left(1 + |\alpha|_\infty\right) |u|_{H_0^1(\Omega)}|v|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq 2\tilde{C}|u|_{H_0^1(\Omega)}|v|_{H_0^1(\Omega)}, \ \tilde{C} = \text{máx}\,\{1, \widehat{C}^2\left(1+|\alpha|_\infty\right)\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $a(u,v)$ es continua.

Observación 4.3. $a(u,v)$ es coerciva.

En efecto, sea $u \in H_0^1(\Omega)$, de la hipótesis (H4) y (4.46), resulta

$$\begin{aligned} |a(u,u)| &= |\nabla u|^2_{L^2(\Omega)} + |u|^2_{L^2(\Omega)} + |(\alpha(\cdot)u, u)| \\ &\geq |\nabla u|^2_{L^2(\Omega)} + |u|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha_0 |u|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\geq k\left(|\nabla u|^2_{L^2(\Omega)} + |u|^2_{L^2(\Omega)}\right) \\ &\geq k|u|^2_{H_0^1(\Omega)}, \ k = \text{mín}\,\{1, 1+\alpha_0\}\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $a(u,v)$ es coerciva.

Observación 4.4. La aplicación

$$\begin{array}{rccl} L: & H_0^1(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ & v & \mapsto & L(v): \ = (f+g,v)_{L^2(\Omega)} \end{array}$$

es lineal y continua en $H_0^1(\Omega)$, es decir, $L \in (H_0^1(\Omega))'$.

En efecto,

a) L es lineal. Sean $u,v \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Como $f \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ y $g \in L^2(\Omega)$ resulta $f+g \in L^2(\Omega)$. Luego

$$\begin{aligned} L(u+v) &= (f+g,u+v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega (f+g)(u+v)dx = \int_\Omega (f+g)udx + \int_\Omega (f+g)vdx \\ &= (f+g,u)_{L^2(\Omega)} + (f+g,u)_{L^2(\Omega)} = L(u) + L(v). \end{aligned}$$

b) L es continua. Sea $u \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Aplicando la desigualdad de Hölder y (4.48) resulta

$$|L(v)| = |(f+g,u)_{L^2(\Omega)}| = \left| \int_\Omega (f+g)udx \right| \leq \widehat{C}|f+g|_{L^2(\Omega)}|v|_{H_0^1(\Omega)}$$

De los ítems a) y b) concluimos que $L \in (H_0^1(\Omega))'$.
Por teorema de Lax - Milgram, existe un único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$a(u,v) = L(v), \ \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

es decir,

$$(\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} + ((\alpha(\cdot)+1)u,v)_{L^2(\Omega)} = (f+g,v)_{L^2(\Omega)}, \ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

En particular, tenemos

$$(\nabla u, \nabla \varphi)_{L^2(\Omega)} + ((\alpha(\cdot)+1)u,\varphi)_{L^2(\Omega)} = (f+g,\varphi)_{L^2(\Omega)}, \ \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Usando la fórmula de Green obtenemos

$$-\Delta u + (\alpha(\cdot)+1)u = f+g$$

en el sentido de $D'(\Omega)$.
Aplicando el teorema de Regularidad Elíptica para el operador $(\alpha(\cdot)+1)I - \Delta$ resulta $u \in H^2(\Omega)$ y como $u \in H_0^1(\Omega)$ entonces $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Además $v = u - f \in H_0^1(\Omega)$, con lo que queda demostrado la afirmación 4.7.

Luego, el par $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A})$ es solución de la ecuación (4.43). Por lo tanto, el operador $\mathcal{A}$ es maximal. $\square$

Observación 4.5. Dado que $\mathcal{A}$ es un operador maximal mónotono, el teorema de Lumer-Phillips (Pazy, 1983, p. 40) garantiza que se trata de un generador infinitesimal de un semigrupo de contracción de clase C_0 sobre $\mathcal{H}$.

Lema 4.3. *Para todo $u, v \in L^2(\Omega)$ se cumple*

$$f(u) + a(\cdot)g(v) \in L^2(\Omega).$$

Demostración. De la hipótesis (H2) y la desigualdad $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f(u)|^2 dx &\leq \int_\Omega \left[(1+|u|^{p-1})|u|\right]^2 dx \\
&\leq 2C\left(\int_\Omega |u|^2 dx + \int_\Omega |u|^{2p} dx\right) \\
&= 2C(|u|^2_{L^2(\Omega)} + |u|^{2p}_{L^{2p}(\Omega)}). \qquad (4.49)
\end{aligned}$$

De la inmersión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2p}(\Omega)$, existe una constante $\tilde{C} > 0$ tal que

$$|u|_{L^{2p}(\Omega)} \leq \tilde{C}|u|_{H_0^1(\Omega)}, \text{ para todo } u \in H_0^1(\Omega). \qquad (4.50)$$

De (4.49) y (4.50) se obtiene

$$\int_\Omega |f(u)|^2 dx \leq 2C\left(|u|^2_{L^2(\Omega)} + \tilde{C}^2 |u|^{2p}_{H_0^1(\Omega)}\right) < \infty. \qquad (4.51)$$

De las hipótesis (H1) y (H3) obtenemos

$$\int_\Omega |a(x)g(v)|^2 dx \leq M^2 |a|^2_\infty \int_\Omega |v|^2 dx < \infty. \qquad (4.52)$$

De (4.51) y (4.52) resulta $f(u) + a(\cdot)g(v) \in L^2(\Omega)$. □

Observación 4.6. Del lema 4.3 obtenemos la buena definición del operador F.

Lema 4.4. *El operador $F : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es localmente lipschitziano.*

Demostración. Sean $U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ y $U_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ tal que

$$\|U_1\|_\mathcal{H} \leq M \text{ y } \|U_2\|_\mathcal{H} \leq M \text{ para algún } M > 0. \qquad (4.53)$$

De la hipótesis (H2) y la desigualdad $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
|f(u_1) - f(u_2)|^2_{L^2(\Omega)} &\leq C^2 \int_\Omega \left\{\left(1 + |u_1|^{p-1} + |u_2|^{p-1}\right)|u_1 - u_2|\right\}^2 dx \\
&\leq 3C^2 \left(\int_\Omega |u_1 - u_2|^2 dx + \int_\Omega |u_1|^{2(p-1)}|u_1 - u_2|^2 dx\right. \\
&\qquad \left. + \int_\Omega |u_2|^{2(p-1)}|u_1 - u_2|^2 dx\right).
\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Hölder para los conjugados $\dfrac{1}{p}$ y $\dfrac{p-1}{p} = 1$ se obtiene

$$\begin{aligned} |f(u_1) - f(u_2)|^2_{L^2(\Omega)} \;\leq\; & 3C^2 \Big(|u_1 - u_2|^2_{L^2(\Omega)} + |u_1|^{2(p-1)}_{L^{2p}(\Omega)} |u_1 - u_2|^2_{L^{2p}(\Omega)} \\ & + |u_2|^{2(p-1)}_{L^{2p}(\Omega)} |u_1 - u_2|^2_{L^{2p}(\Omega)} \Big). \end{aligned}$$

De las desigualdades (4.48), (4.50) y (4.53) resulta

$$|f(u_1) - f(u_2)|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_M |u_1 - u_2|^2_{H^1_0(\Omega)} \tag{4.54}$$

donde $C_M = 3C^2 \left(\widehat{C}^2 + \tilde{C}^{2p} M^{2(p-1)} + \tilde{C}^{2p} M^{2(p-1)} \right)$.

Por el teorema del valor medio, existe $\lambda \in (s_1, s_2)$ tal que

$$g(s_1) - g(s_2) = g'(\lambda)(s_1 - s_2) \tag{4.55}$$

De (4.55) y la hipótesis (H3) se obtiene

$$|a(\cdot)\,(g(v_1) - g(v_2))\,|^2_{L^2(\Omega)} \leq |g'|^2_{L^\infty(\Omega)} |a|^2_{L^\infty(\Omega)} |v_1 - v_2|^2_{L^2(\Omega)} \tag{4.56}$$

De la definición del operador F y la norma de $\mathcal{H}$ resulta

$$\|F(U_1) - F(U_2)\|_{\mathcal{H}} = |f(u_1) - f(u_2)|^2_{L^2(\Omega)} + |a(\cdot)\,(g(v_1) - g(v_2))\,|^2_{L^2(\Omega)}$$

De (4.54) y (4.56) resulta

$$\begin{aligned} \|F(U_1) - F(U_2)\|_{\mathcal{H}} \;&\leq\; L_M \left(|u_1 - u_2|^2_{H^1_0(\Omega)} + |v_1 - v_2|^2_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\leq\; L_M \|U_1 - U_2\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

donde $L_M = \max \left\{ C_M, |g'|^2_{L^\infty(\Omega)} |a|^2_{L^\infty(\Omega)} \right\}$. Por tanto, F es localmente lipschitziana en $\mathcal{H}$. $\square$

Por el teorema 2.6, para cada $U_0 \in \mathcal{H}$, existe únicamente una solución débil del sistema (4.42) en la clase

$$U \in C([0, t_{max}[; H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega)),$$

es decir,

$$u \in C([0, t_{max}[; H^1_0(\Omega)) \cap C^1([0, t_{max}[; L^2(\Omega)).$$

4.2.1. Prolongamiento de la solución débil

Multiplicamos la ecuación $(1.5)_1$ por u_t e integrando sobre Ω, obtenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \left(\int_\Omega \left[|\nabla u|^2 + |u_t|^2 + \alpha(x)|u|^2 \right] dx + \int_\Omega F(u) dx \right) + \int_\Omega a(x) g(u_t) u_t dx = 0.$$

De las hipótesis (H1) y (H3)b) resulta

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \left(\int_\Omega \left[|\nabla u|^2 + |u_t|^2 + \alpha(x)|u|^2 \right] dx + \int_\Omega F(u) dx \right) \leq 0. \tag{4.57}$$

Observación 4.7. La función

$$F(s) = \int_0^s f(t)dt, \ \forall s \in \mathbb{R},$$

está bien definida por la hipótesis (H2).

Integrando la desigualdad (4.57) de 0 hasta t, $t \in [0; t_{max}]$, se obtiene

$$\int_\Omega \left[|\nabla u|^2 + |u_t|^2 + \alpha(x)|u|^2 \right] dx + \int_\Omega F(u)dx \leq C \tag{4.58}$$

donde la constante $C > 0$ no depende de t. Luego

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}} = \int_\Omega \left[|\nabla u|^2 + |u_t|^2 + \alpha(x)|u|^2 \right] dx < \infty$$

por el teorema 2.7 resulta $t_{max} = +\infty$.
En resumen se ha demostramos el siguiente

Teorema 4.2. *Dado $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ y $u_1 \in L^2(\Omega)$, existe únicamente una solución débil del problema (1.5) – (1.7) en la clase*

$$u \in C([0, \infty[; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, \infty[; L^2(\Omega)).$$

4.3. Discusión de los resultados

En lo que respecta a la hipótesis general de investigación “Existe una única solución para la ecuación de onda semilineal con disipación localizada no lineal”, los resultados obtenidos y que se expresan en los teoremas 4.1 y 4.2 indican que existen una única solución para el problema (1.5) – (1.7) por lo que podemos afirmar que la citada hipótesis ha sido respaldada. Estos resultados están en la misma línea que los encontrados por Enrique Zuazua (1990), Mitsuhiro Nakao (1996) y Alisson Rafael Aguiar Barbosa (2005), los mismos que se exponen en los antecedentes de la investigación y que resalta la importancia de las teoría de semigrupos lineales en la solución de EDPs. Por otra parte estos resultados no hacen sino ratificar que las estimativas a priori obtenidas en la sección 4.1 permitieron acotar las soluciones y asi abordar el problema aproximado para luego con el pasaje al limite determinar la convergencia, probando asi la existencia de soluciones en el problema (1.5) – (1.7).

En lo que se refiere a las hipótesis específicas, las condiciones $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ y $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ son las necesarias para establecer la existencia única de la solución regular de la ecuación (1.5).

Para la unicidad de la solución, consideramos la existencia de dos soluciones diferentes para la ecuación (1.5) y mediante el método de la energía encontramos que ambas deben ser iguales.

Capítulo 5

Conclusiones y Recomendaciones

5.1. Conclusiones

Al terminar esta investigación, se llegó a las siguientes conclusiones

i) Mediante el método de Faedo-Galerkin se desarrolló de manera detallada la existencia de la solución regular del problema (1.5) – (1.7) y usando el método de la energía se demostró la unicidad de solucion.

ii) Mediante las técnicas multiplicativas y la teoría de semigrupos demostró la existencia única de la solución débil del problema (1.5) – (1.7)

5.2. Recomendaciones

i) Se recomienda estudiar la existencia y unicidad de solución del problema (1.5) – (1.7) en un dominio no acotado de $\mathbb{R}^n$ y trabajando con otros espacios funcionales como por ejemplo los espacios de Sobolev de exponente variable.

i) Se recomienda complementar esta investigación estudiando el comportamiento asintótico de las soluciones del problema (1.5) – (1.7).

Referencias bibliográficas

Adams, R. A. (1975). *Sobolev spaces.* Academic Press.

Barbosa, A. R. A. (2005). *Existência global e propriedades assintóticas para a equação semilinear da onda em $\mathbb{R}^n$.* (Tesis de Master, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC). Descargado de https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/102077

Brezis, H. (1973). *Operateurs Maximaux Monotones et Semigroups de Contractions dans les Spaces de Hilbert.* North Holland Publishing Co.

Brezis, H. (2010). *Functional analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer.

Cavalcanti, M., y Cavalcanti, V. (2019). *Introdução à teoria das distribuições e aos espaços de Sobolev.* Editora da Universidade Estadual de Maringá.

Coddington, E., y Levinson, N. (1955). *Theory of Ordinary Differential Equations.* Mac Graw-Hill.

Edwards, R. (1965). *Functional Analysis. Theory and Applications.* Holt, Rinehart and Winston.

Giordano, C. M. (2016). *Ecuaciones diferenciales parciales.* Editorial de la Universidad de la Plata. Descargado de http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/60310

Kesavan, S. (1989). *Topics in functional analysis and applications.* Wiley Eastern Limited.

Lions, J. L. . M. E. (1968). *Quelques Problémes aux Limites nom Homogens et Applications.* Dumos.

Medeiros, L., y Amancio de Mello, E. (2008). *A integral de Lebesgue.* Instituto de Matematica - UFRJ.

Medeiros, L., y Milla, M. (2000). *Espaços de Sobolev.* Instituto de Matematica - UFRJ.

Milla, M. M. (1994). *Análise Espectral em Espaços de Hilbert.* Instituto de Matematica - UFRJ.

Nakao, M. (1996). Decay of solutions of the wave equation with a local degenerate dissipation. *Israel Journal of Mathematics*, *95*(1), 25 - 42.

Pazy, A. (1983). *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* Springer–Verlag.

Peña, C. (2012). *Comportamiento asintótico para la ecuación de onda semilineal con amortiguamiento local en dominios no acotados* (Tesis de Master). Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Rincon, J. (2004). *Ecuaciones diferenciales ordinarias en el sentido de Carathéodory.* University of Birmingham.

Teman, R. (1979). *Navier-Stokes equations-Theory and numerical analysis.* North Holland.

Zeidler, E. (1989). *Nonlinear Functional Analysis and its Applications.* Springer-Verlag.

Zuazua, E. (1990). Exponential decay for the semilinear wave equations, with locally distributed damping. *Communications in Partial Differential Equations*, *15*(2), 205–235. doi: 10.1080/03605309908820684

Zuazua, E. (1991). Exponential decay for the semilinear wave equations, with localized damping in unbounded domains. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, *70*(1), 513–529.

Existencia y unicidad de solución para la ecuación de onda semilineal con disipación localizada no lineal

INFORME DE ORIGINALIDAD

22%	22%	11%	7%
INDICE DE SIMILITUD	FUENTES DE INTERNET	PUBLICACIONES	TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1	revistasinvestigacion.unmsm.edu.pe Fuente de Internet	9%
2	hdl.handle.net Fuente de Internet	1%
3	mtm.ufsc.br Fuente de Internet	1%
4	cybertesis.unmsm.edu.pe Fuente de Internet	1%
5	repositorio.uns.edu.pe Fuente de Internet	1%
6	www.pma.uem.br Fuente de Internet	1%
7	Submitted to Universidad Nacional del Santa Trabajo del estudiante	1%
8	livrozilla.com Fuente de Internet	1%
9	documents.mx Fuente de Internet	

1 %

10	Submitted to Universidad Cesar Vallejo Trabajo del estudiante	<1 %
11	Submitted to Universidad Nacional de Tumbes Trabajo del estudiante	<1 %
12	UNITEXT, 2016. Publicación	<1 %
13	tel.archives-ouvertes.fr Fuente de Internet	<1 %
14	revistas.unitru.edu.pe Fuente de Internet	<1 %
15	Submitted to Universidad Nacional de Trujillo Trabajo del estudiante	<1 %
16	epdf.pub Fuente de Internet	<1 %
17	B. A. Carmo, H. R. Clark, R. R. Guardia, M. A. Rincon. "Mathematical Analysis and Numerical Simulation of a Nonlinear Thermoelastic System", Numerical Functional Analysis and Optimization, 2018 Publicación	<1 %
18	Tae Gab Ha. "On viscoelastic wave equation with nonlinear boundary damping and source	<1 %

term", Communications on Pure & Applied Analysis, 2010
Publicación

19	repositorio.unac.edu.pe Fuente de Internet	<1 %
20	Carlos Alberto Peña Miranda, Alfonso Pérez Salvatierra, Elizabeth Cosi Cruz. "Aplicación de la teoría de semigrupos a una ecuación de onda semilineal con disipación localizada", Pesquimat, 2020 Publicación	<1 %
21	Submitted to UNILIBRE Trabajo del estudiante	<1 %
22	www.coursehero.com Fuente de Internet	<1 %
23	Mitsuhiro Nakao. "Decay and Global Existence for Nonlinear Wave Equations with Localized Dissipations in General Exterior Domains", Operator Theory Advances and Applications, 2005 Publicación	<1 %
24	repositorio.upagu.edu.pe Fuente de Internet	<1 %
25	www.asesoriasenmatematicas.cl Fuente de Internet	<1 %
26	www.yumpu.com Fuente de Internet	

<1%

27	ejde.math.txstate.edu Fuente de Internet	<1%
28	arxiv.org Fuente de Internet	<1%
29	K. Sakthivel, A. Arivazhagan, N. Barani Balan. "Inverse problem for a Cahn–Hilliard type system modeling tumor growth", Applicable Analysis, 2020 Publicación	<1%
30	idoc.pub Fuente de Internet	<1%

Excluir citas	Activo	Excluir coincidencias	< 15 words
Excluir bibliografía	Activo		