UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SANTA

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES

ESCUELA ACADÉMICA PROFESIONAL DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES ALGEBRAICAS Y TRASCENDENTES

MONOGRAFÍA PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN EN LA ESPECIALIDAD DE FÍSICA Y MATEMÁTICA

BACHILLER : CARLOS BADILLO MORENO

ASESOR : HERÓN JUAN MORALES MARCHENA

NUEVO CHIMBOTE – PERÚ

2017

HOJA DE CONFORMIDAD

En el cumplimiento de lo estipulado en el Reglamento de Grados y Títulos, para la modalidad de Monografía, el que suscribe da cuenta de haber participado como asesor del Exalumno: Carlos Badillo Moreno, de la especialidad de Física y Matemática en la Monografía titulada: SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES ALGEBRAICAS Y TRASCENDENTES.

Queda conforme con el desarrollo de la investigación y elaboración del trabajo.

Herón Juan Morales Marchena

Asesor

A Dios, quién es mi apoyo incondicional, me guía, me acompaña, y me muestra el camino para convertirme en un ejemplo para mis estudiantes.

A mis padres, por su apoyo incondicional por inculcarme el hábito por el estudio y superación, además de estar allí siempre alentándome para continuar sin desmayar, mostrándome que con esfuerzo se puede lograr todo en la vida.

El autor

PRESENTACIÓN

El presente trabajo monográfico titulado: “SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES ALGEBRAICAS Y TRASCENDENTES”, presenta un conjunto de métodos iterativos para el cálculo aproximado de las raíces de ecuaciones Algebraicas y Trascendentes que por su naturaleza no pueden ser halladas con métodos analíticos.

El trabajo presenta dos tipos de solución para el cálculo de la raíz real de una ecuación: una solución geométrica aproximada de la raíz y otra solución iterativa con su algoritmo de solución, así como su criterio de convergencia.

.

El autor

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El periodo de 1700 a.c. a 1700 d.c, se caracterizó por la invención gradual de símbolos y la resolución de ecuaciones. Dentro de esta fase encontramos un álgebra desarrollada por los griegos (300 a.c.), llamada álgebra geométrica, rica en métodos geométricos para resolver ecuaciones algebraicas.

La introducción de la notación simbólica asociada a Viète (1540-1603), marca el inicio de una nueva etapa en la cual Descartes (1596-1650) contribuye de forma importante al desarrollo de dicha notación. En este momento, el álgebra se convierte en la ciencia de los cálculos simbólicos y de las ecuaciones. Posteriormente, Euler (1707-1783) la define como la teoría de los "cálculos con cantidades de distintas clases" (cálculos con números racionales enteros, fracciones ordinarias, raíces cuadradas y cúbicas, progresiones y todo tipo de ecuaciones). Para llegar al actual proceso de resolución de ecuaciones del tipo: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \quad \ldots \quad + a_1 x + a_0 = 0.$

En una gran variedad de problemas de la vida diaria así como en el desarrollo de la ciencia, se modelan por medio de ecuaciones, existiendo fórmulas generales para resolver las ecuaciones de primer y segundo grado, en este sentido Girolamo Cardano (1501-1576) presentó la solución particular para ecuaciones de tercer grado, más no para el modelo general $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, presentando de esta manera una dificultad en la solución analítica de estos problemas, y aún aumentado este problema en ecuaciones de mayor grado y de las ecuaciones trascendentes.

El objetivo de la presente monografía denominada *Solución numérica de ecuaciones algebraicas y trascendentes*, desarrolla teóricamente y a modo de ejemplos un conjunto de métodos alternativos al problema anteriormente mencionado.

CAPITULO I

SOLUCIÓN GRÁFICA DE RAÍCES DE ECUACIONES ALGEBRAICAS Y TRASCENDENTES

Frecuentemente en el quehacer diario, nos encontramos con expresiones de la forma $f(x)=0$, siendo necesario el cálculo de x, esto es la raíz de f, en este capítulo estudiaremos métodos gráficos y analíticos que nos permitirán aproximar este valor a través de una sucesión de valores reales.

I.- Solución gráfica.- Nos permite estimar los valores de las raíces.

a.- Primera Forma.- Consiste en trazar las gráficas de la función asociada f donde puedan reconocerse si existen valores $r \in \mathbb{R}$ talque $f(r)=0$.

Ejemplo: Aproximar los valores de las raíces de la ecuación.

$$2x^3+3x^2-12x+6=0$$

Solución.- Obtenemos la función f asociada.

$$f(x)=2x^3+3x^2-12x+6$$

X	-4	-3	-2	-1	1	2	Raíces aproximadas.		
Y	-26	15	26	19	-1	10	r1~-3.5	r2~0.6	r3~1.4

b.- Segunda Forma.- Consiste en transformar la función asociada f en la forma $f_1(x) = f_2(x)$, luego f_1 y f_2 se grafican en el mismo sistema de coordenadas donde las raíces de f son las intersecciones de las gráficas.

Ejemplo: Estimar los valores de las raíces de la ecuación.

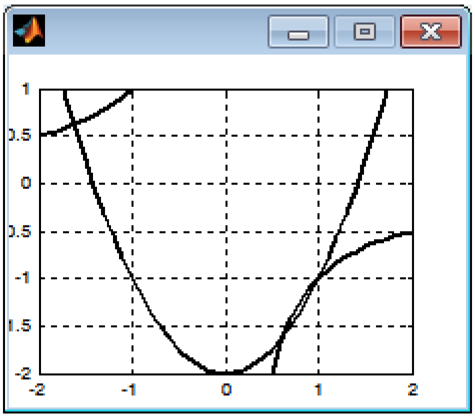
$$x^2 + \frac{1}{x} - 2 = 0$$

Solución.- Obtenemos la función asociada.

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x} - 2$$

Despejando tenemos: $x^2 - 2 = -\frac{1}{x}$

Luego: $f_1(x) = x^2 - 2$; $f_2(x) = -\frac{1}{x}$



x	-2	-1	0	1	2	Raíces aproximadas.		
f1	2	-1	-2	-1	2			
f2	0.5	1		-1	-0.5	r1 ~ -1.6	r2 ~ 0.6	r3 = 1

Ejemplo: Estimar los valores de las raíces de la ecuación.

$$senx - \frac{1}{x} + 1 = 0$$

Solución.- Obtenemos la función asociada.

$$f(x) = senx - \frac{1}{x} + 1$$

Despejando tenemos:

$$senx = \frac{1}{x} - 1$$

Luego: $f_1(x) = senx \quad , \quad f_2(x) = \frac{1}{x} - 1$

X	0	1	2	3	4	5	6	Raíces aproximadas.		
f1	0	0.84	0.9	0.14	-0.75	-0.95	-0.27			
f2		0	-0.5	-0.6	-0.75	-0.8	-0.83	r1 ~ 0.6	r2 ~	r3 ~ 5.3

Gráficamente se puede observar que la ecuación posee infinitas raíces positivas conforme $x \to \infty$.

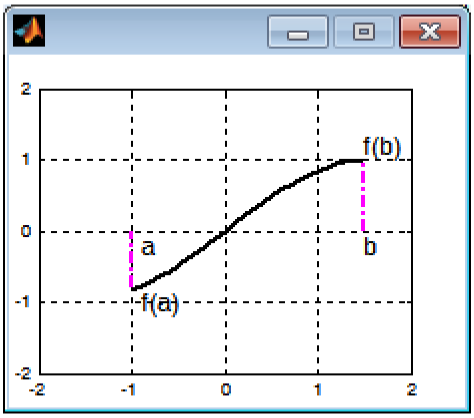
Observación.- La descomposición de la función $f(x) = 0$, puede realizarse de muchas formas, entre las cuales se procura elegir aquellas en que resulta más "simple" la gráfica de f_1 y f_2.

CAPITULO II

SOLUCIÓN ITERATIVA DE RAÍCES DE ECUACIONES ALGEBRAICAS Y TRASCENDENTES

Proposición (Existencia).- Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, una función continua en $[a,b]$, si $f(a)f(b)\prec 0$ entonces f posee al menos una raíz en $[a,b]$.

Es decir $\exists\, r\in[a,b]/\ f(r)=0$.



Geométricamente se puede establecer la solución en la intersección de la función con el eje X.

II.- Solución Iterativa.- A continuación se presentan diversos métodos iterativos que van a permitir mejorar la obtención de los valores de las raíces.

MÉTODO DE BISECCIÓN

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, una función continua, talque f posee una raíz en $[a,b]$.

Procedimiento:

i).-Cálculo de la aproximación de la raíz $x_n=\dfrac{a+b}{2}$, fórmula de iteración.

ii).- Si $f(a)f(x_n)\prec 0$, entonces la raíz se encuentra en $[a,x_n]$, hacer

$b=x_n$, regresar a i).

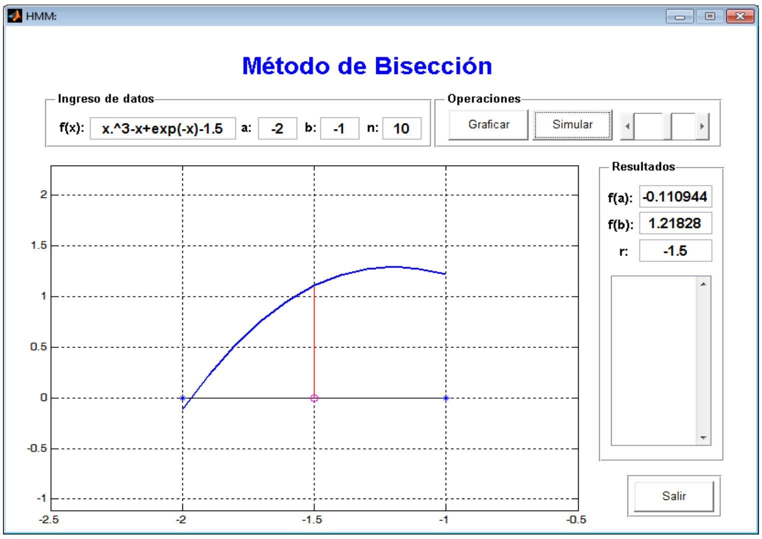
- Si $f(x_n)f(b)\prec 0$, entonces la raíz se encuentra en $[x_n,b]$, hacer

$a=x_n$, regresar a i).

Si $f(x_n)=0$, entonces la raíz $r=x_n$.

iii).- El proceso termina si el error es aceptable, constituyéndose una sucesión.

$$x_1,x_2,x_3,\ldots\to\ldots,r$$

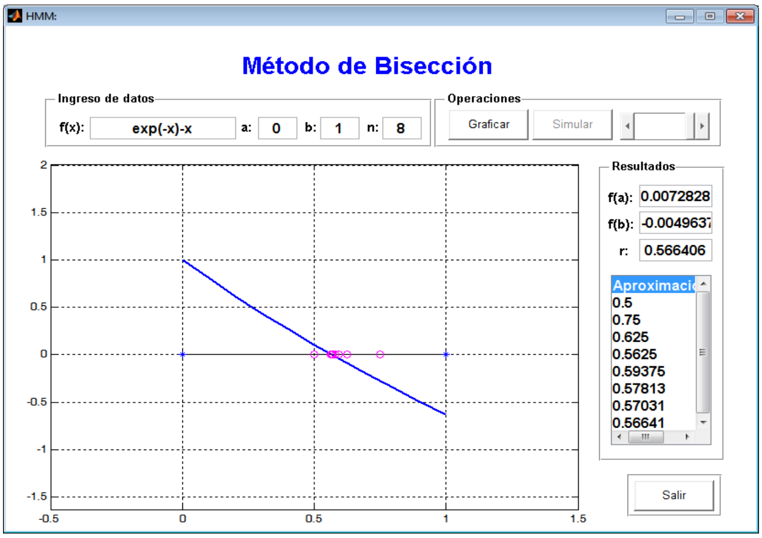


Ejemplo: Hallar la raíz en la ecuación $e^{-x} - x = 0$

Solución.- Construimos la función asociada, $f(x) = e^{-x} - x$, que es continua en $[0\,,1]$, además $f(0) = 1$ y $f(1) = -0.6321$.

Donde se concluye que f posee una raíz en $a = 0$, $b = 1$.

A continuación se presentan 8 aproximaciones para esta raíz.

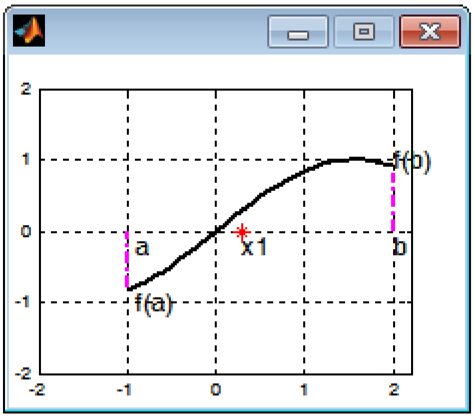


Iteración	1	2	3	4
Aproximación	0.5	0.75	0.625	0.562
Iteración	5	6	7	8
Aproximación	0.593	0.578	0.570	0.56641

Error del Método de Bisección

Sea r una raíz de f en $[a\,,b]$, $x_1, x_2, x_3, \ldots$, aproximaciones de la raíz.

Gráfica.



De la gráfica tenemos:

$$|r - x_1| \le \frac{b-a}{2}$$

$$|r - x_2| \le \frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)}{2} = \frac{b-a}{2^2}$$

$$|r - x_3| \le \frac{\left(\frac{b-a}{2^2}\right)}{2} = \frac{b-a}{2^3}$$

$$|r - x_4| \le \frac{\left(\frac{b-a}{2^3}\right)}{2} = \frac{b-a}{2^4} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$|r - x_n| \le \dfrac{b-a}{2^n}$; error absoluto en la n-esima iteración, donde $r \in [a,b]$.

Ejemplo: En la ecuación $e^{-x} - x = 0$, $r \in [a\ , b]$, donde $a = 0$, $b = 1$.

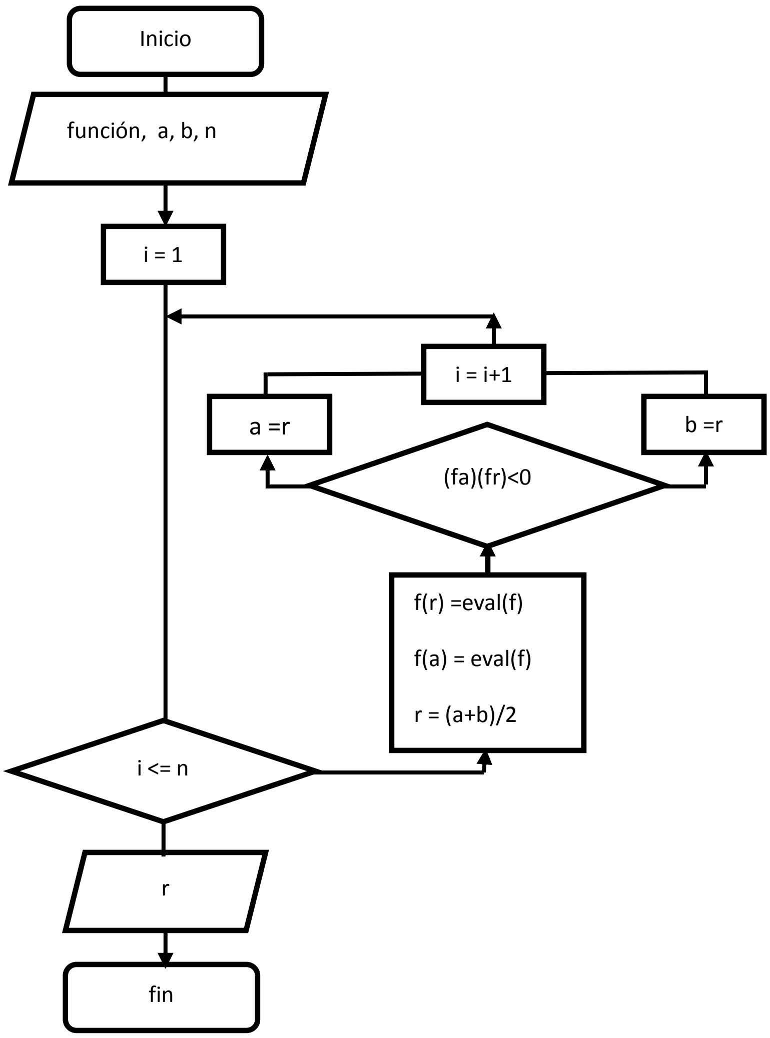
En la primera iteración: $\in_a \leq 1/2$

En la segunda iteración: $\in_a \leq 1/4$

… ...

En la n-esima iteración: $\in_a \leq 1/2^n$; $\in_a$: error absoluto.

Diagrama de flujo: Método de Bisección.

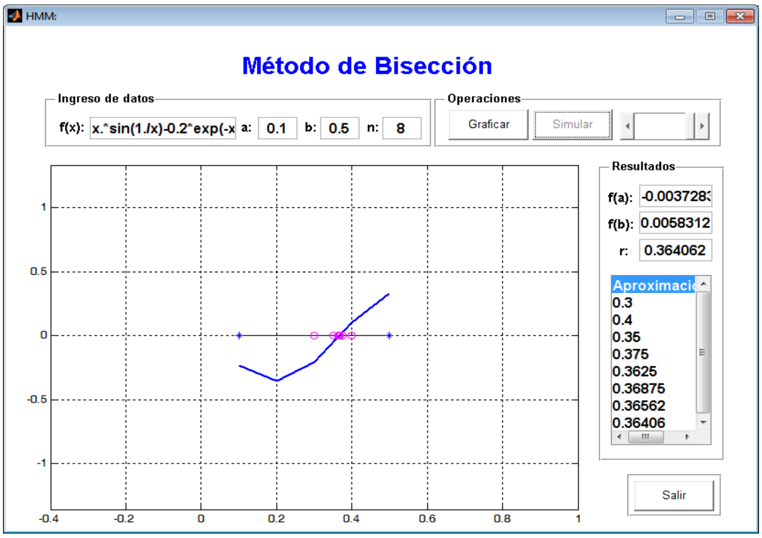


Ejemplo: Calcular el valor de x en la ecuación $xsen(1/x)-0.2e^{-x}=0$

Solución.- Construimos la función asociada, $f(x)=xsen(1/x)-0.2e^{-x}$, que es continua en $[0.1\,,0.5]$, además $f(0.1)=-0.2354$ y $f(0.5)=0.3333$.

Donde se concluye que f posee una raíz en $a=0.1$, $b=0.5$.

A continuación se presentan 8 aproximaciones para esta raíz.



Iteración	**1**	**2**	**3**	**4**
Aproximación	0.3	0.4	0.35	0.375
Iteración	5	6	7	8
Aproximación	0.3625	0.36875	0.3656:	0.36406

MÉTODO DE LA REGLA FALSA

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, una función continua, talque f posee una raíz en $[a,b]$.

i).- Construyamos una recta L_1 que pasa por los puntos $P(a, f(a))$ y $Q(b, f(b))$, su ecuación estaría dado por:

$$y-f(a)=\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](x-a) \quad .... \ (*)$$

Consideremos la intersección de L_1 con el eje X como la primera aproximación de la raíz, es decir $y=0$ reemplazando en (*) tenemos:

$$a-f(a)=\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](x-a)$$

Despejando x se obtiene:

$$x=a-f(a)\left[\frac{b-a}{f(b)-f(a)}\right]$$

Donde $x_1=x$, primera aproximación.

Procedimiento:

i).- Cálculo de la aproximación de la raíz.

$$x_n=a-f(a)\frac{[b-a]}{f(b)-f(a)}\to \textit{fórmula de iteración.}$$

ii).- - Si $f(a)f(x_n)\prec 0$, entonces la raíz se encuentra en $[a,x_n]$, hacer $b=x_n$, regresar a i).

- Si $f(x_n)f(b)\prec 0$, entonces la raíz se encuentra en $[x_n,b]$, hacer $a=x_n$, regresar a i).

Si $f(x_n)=0$, entonces la raíz $r=x_n$.

iii).- El proceso termina si el error es aceptable, constituyéndose una sucesión.

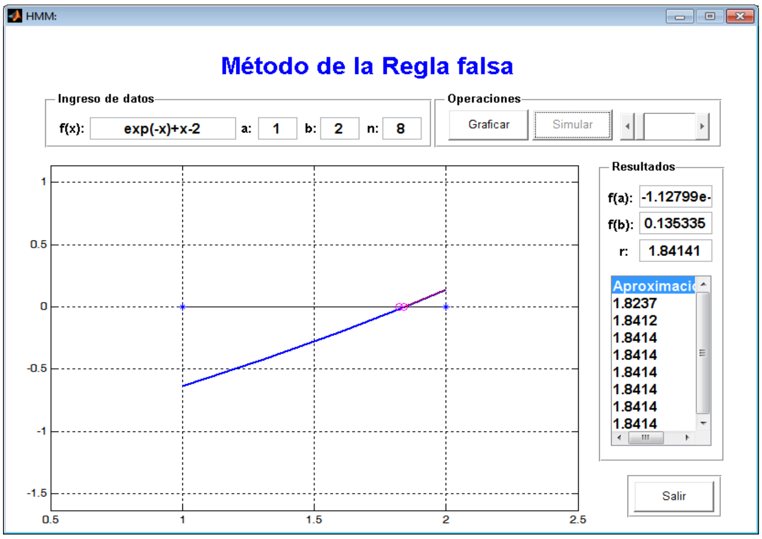
$$x_1, x_2, x_3, \ldots \to \ldots, r$$

Ejemplo: Hallar la raíz en la ecuación $e^{-x}+x-2=0$

Solución.- Construimos la función asociada, $f(x)=e^{-x}+x-2$, que es continua en $[1\,,2]$, además $f(1)=-0.6321$ y $f(2)=0.1353$.

Donde se concluye que f posee una raíz en $a=1$, $b=2$.

A continuación se presentan 8 aproximaciones para esta raíz.



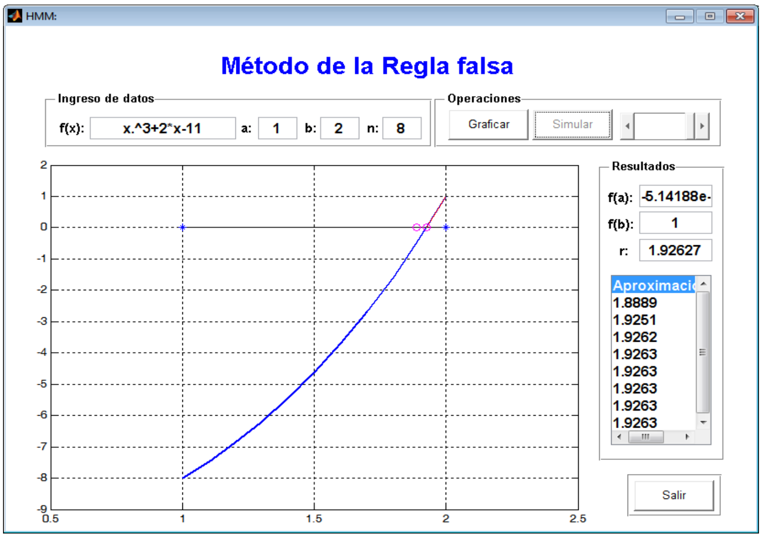
Iteración	**1**	**2**	**3**	**4**
Aproximación	1.8237	1.8412	1.8414	1.8414
Iteración	5	6	7	8
Aproximación	1.8414	1.8414	1.8414	1.8414

Ejemplo: Hallar la raíz en la ecuación $x^3 + 2x - 11 = 0$

Solución.- Construimos la función asociada, $f(x) = x^3 + 2x - 11$, que es continua en $[1, 2]$, además $f(1) = -8$ y $f(2) = 1$.

Donde se concluye que f posee una raíz en $a = 1$, $b = 2$.

A continuación se presentan 8 aproximaciones para esta raíz.



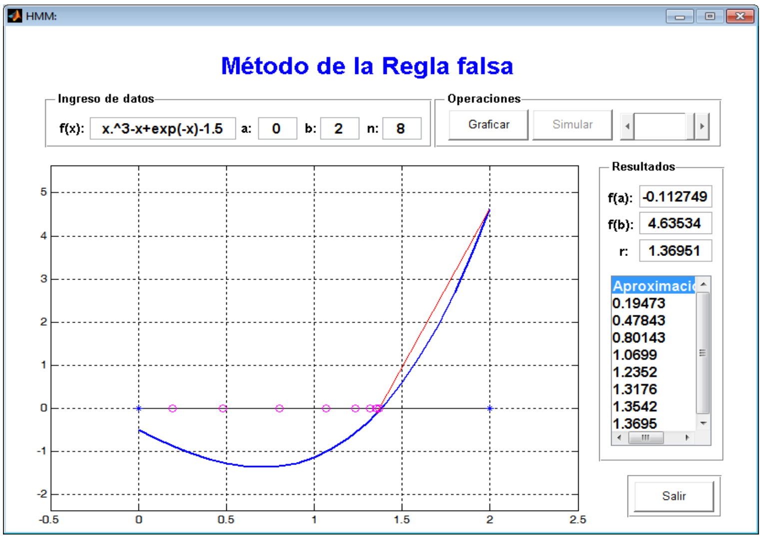
Iteración	1	2	3	4
Aproximación	1.8889	1.9251	1.9262	1.9263
Iteración	5	6	7	8
Aproximación	1.9263	1.9263	1.9263	1.9263

Ejemplo: Hallar la raíz en la ecuación $x^3 - x + e^{-x} - 1.5 = 0$

Solución.- Construimos la función asociada, $f(x) = x^3 - x + e^{-x} - 1.5$, que es continua en $[0, 2]$, además $f(0) = -0.5$ y $f(2) = 4.63534$.

Donde se concluye que f posee una raíz en $a = 0$, $b = 2$.

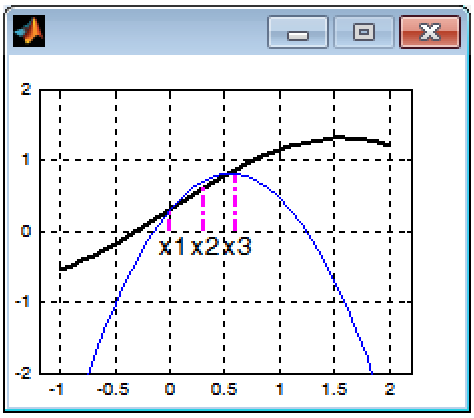
A continuación se presentan 8 aproximaciones para esta raíz.



Iteración	**1**	**2**	**3**	**4**
Aproximación	0.19473	0.47843	0.80143	1.0699
Iteración	5	6	7	8
Aproximación	1.2352	1.3176	1.3542	1.3695

MÉTODO DE MŰLLER

Sea $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$, una función continua, talque f posee una raíz en $[a,b]$. El método de Müller, es una extensión del método de la Regla Falsa el cual aproxima la función asociada f a través de una línea recta, el Método de Müller aproximará a la función f por un polinomio de segundo grado.



Consideremos tres valores iniciales x_1, x_2, x_3, y construyamos el polinomio de segundo grado $P(x)=ax^2+bx+c$, que pase por los puntos $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, **y** $C(x_3, f(x_3))$.

Reemplazando los valores de x en el polinomio tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
ax_1^2+bx_1+c &= f(x_1)\\
ax_2^2+bx_2+c &= f(x_2)\\
ax_3^2+bx_3+c &= f(x_3)
\end{aligned}
$$

De donde obtendremos los valores de $a, b,\ y\ c$.

Intersectemos el polinomio $P(x)$ con el eje X, esto es $P(x)=0$.

Reemplazando se tiene: $ax^2+bx+c=0$

Utilizamos la fórmula general de segundo grado para determinar el valor de x.

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

De donde se tomará la primera aproximación de la raíz, siendo el que se encuentre más cercano a la raíz.

Procedimiento:

i). Consideremos tres valores iniciales x_1, x_2, x_3 , y construyamos el polinomio de segundo grado: $P(x) = ax^2 + bx + c$, que pase por los puntos $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, y $C(x_3, f(x_3))$.

ii). Cálculo de la primera aproximación de la raíz en la fórmula.

$$r_1 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

iii). Asignar el valor de r_1 en uno de los valores $x_1, x_2, o\ x_3$ y regresar a i).

El proceso termina si el error es aceptable, constituyéndose una sucesión.

$$x_1, x_2, x_3, \ldots \rightarrow \ldots, r$$

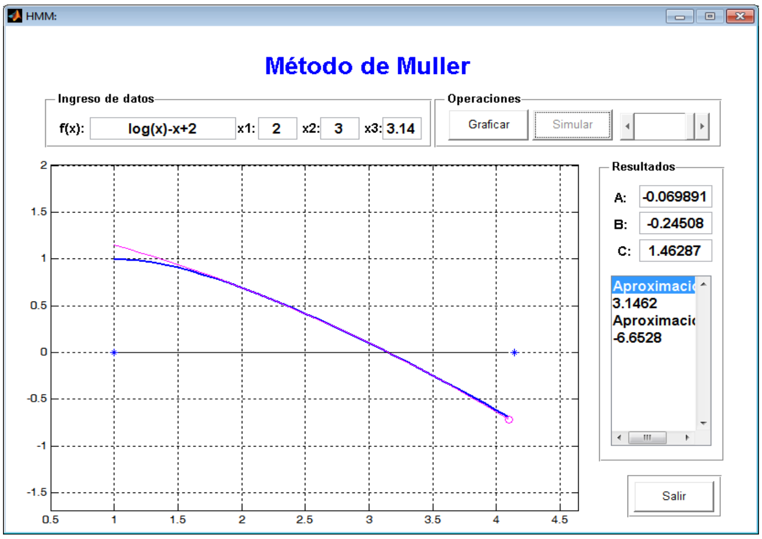
Ejemplo: Hallar la raíz en la ecuación $\ln x - x + 2 = 0$.

Solución.- Construimos la función asociada, $f(x) = \ln x - x + 2$, que es continua en $[3, 4]$, además $f(3) = 0.0986$ y $f(4) = -0.6137$.

Donde se concluye que f posee una raíz en $a = 3$, $b = 4$.

Consideremos los valores iniciales: $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 3.14$

A continuación se presentan los valores para la primera aproximación de esta raíz.



Iteración	Aproximación 1	Aproximación 2
1	3.1462	-6.6528

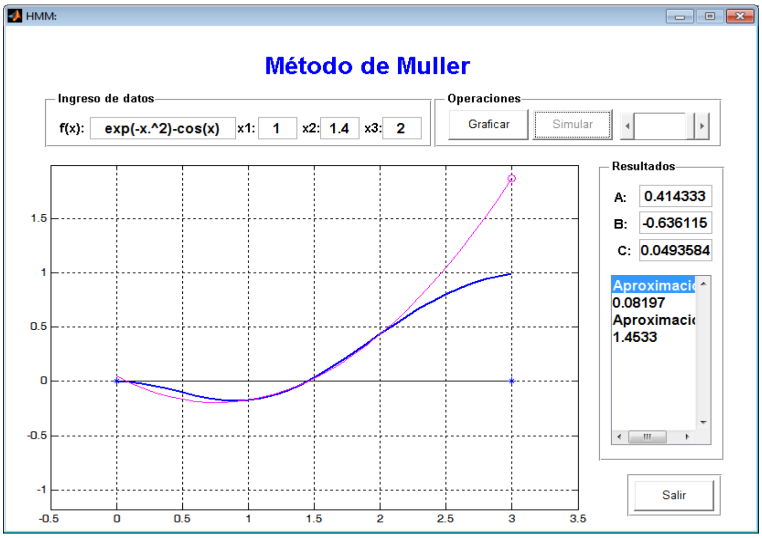
Ejemplo: Hallar la raíz en la ecuación $e^{-x^2} - \cos x = 0$.

Solución.- Construimos la función asociada, $f(x) = e^{-x^2} - \cos x$, que es continua en $[1, 2]$, además $f(1) = -0.1724$ y $f(2) = 0.4345$.

Donde se concluye que f posee una raíz en $a = 1$, $b = 2$.

Consideremos los valores iniciales: $x_1 = 1$, $x_2 = 1.4$, $x_3 = 2$.

A continuación se presentan los valores para la primera aproximación de esta raíz.



Iteración	Aproximación 1	Aproximación 2
1	0.08197	1.4533

MÉTODO DEL PUNTO FIJO

Definición.- Dada una función $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $p\in Dom(g)$ es llamado un punto fijo de g, si se verifica: $g(p)=p$.

Ejemplo:

1) Sea $g(x)=x^2-2x+1$

$p=1,\ \ p\in Dom(g)$

Además : $g(1)=1$

Por lo tanto : $p=1$ es un punto fijo de g.

2) Sea $g(x)=18-2x$

$p=6,\ \ p\in Dom(g)$

Además : $g(6)=6$

Por lo tanto : $p=6$ es un punto fijo de g.

Teorema de existencia y unicidad del punto fijo

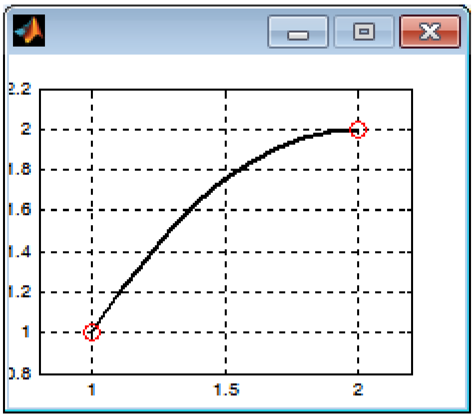
Si $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es continua en $[a\,,b]$ talque $g(x)\in[a\,,b],\ \forall x\in[a\,,b]$, entonces g posee al menos un punto fijo.

Además si $g'(x)$ existe $\forall x\in\langle a\,,b\rangle$, talque $|g'(x)|\prec 1$, entonces g posee un único punto fijo en $[a\,,b]$.

Prueba. Existencia

Casos:

i) Si $g(a)=a$ o $g(b)=b$, la prueba es obvia.



ii) Si $g(a) \neq a$ y $g(b) \neq b$, entonces:

$g(a) \succ a$ y $g(b) \prec b$, porque $g(a)$ y $g(b) \in [a\,,b]$.

$g(a) - a \succ 0$ y $g(b) - b \prec 0$.

Definamos una función: $h(x) = g(x) - x$

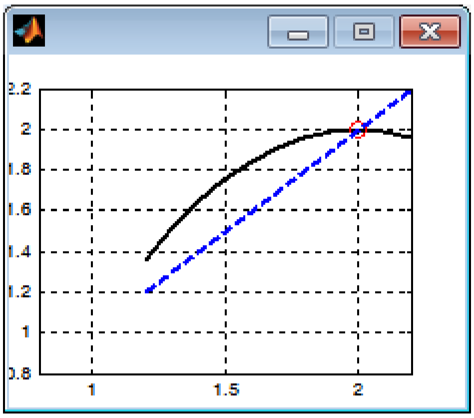
h es continua en $[a\,,b]$ dado que g y $y = x$ son funciones continuas.

Además: $h(a) \succ 0$ y $h(b) \prec 0$

Dónde: $h(a)h(b) \prec 0$ por la proposición de existencia, existe

$r \in [a\,,b]$ talque $h(r) = 0$

$h(r) = g(r) - r = 0 \rightarrow g(r) = r$, r es un punto fijo de g .



Unicidad:

Supongamos que p y q son puntos fijos de g , $p \neq q$

Es decir $g(p) = p$, $g(q) = q$.

Por el teorema del valor medio, existe $c \in \langle a , b \rangle$ talque

$g(p) - g(q) = g'(c)(p - q)$

Aplicando valor absoluto tenemos:

$|g(p) - g(q)| = |g'(c)||p - q| \prec |p - q|$

$|g(p) - g(q)| \prec |p - q|$

Reemplazando: $g(p) = p$, $g(q) = q$

$|p - q| \prec |p - q|$ contradicción.

Por lo tanto p es único.

Procedimiento. Sea $f(x) = 0$, sumemos x en la igualdad

$x = f(x) + x$, reemplacemos $g(x) = f(x) + x$

$x = g(x)$, g se denomina función asociada del punto fijo.

$x_{n+1} = g(x_n)$ .... fórmula de iteración.

i). Determinar un valor inicial x_1 **.**

ii). Sustituir el valor inicial x_1 en la fórmula de iteración obteniendo x_2 .

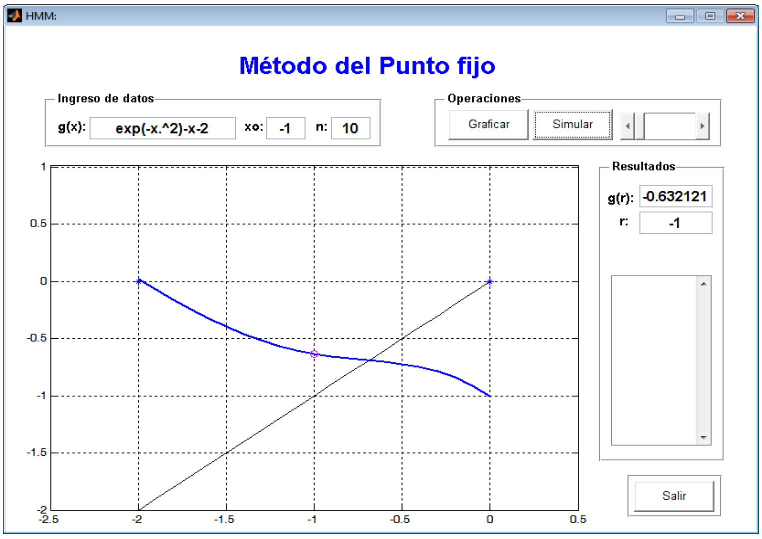
$x_2 = g(x_1)$

iii). Sustituir el valor x_2 en la fórmula de iteración obteniendo x_3 .

$x_3 = g(x_2)$

El proceso termina si el error es aceptable, constituyéndose una sucesión.

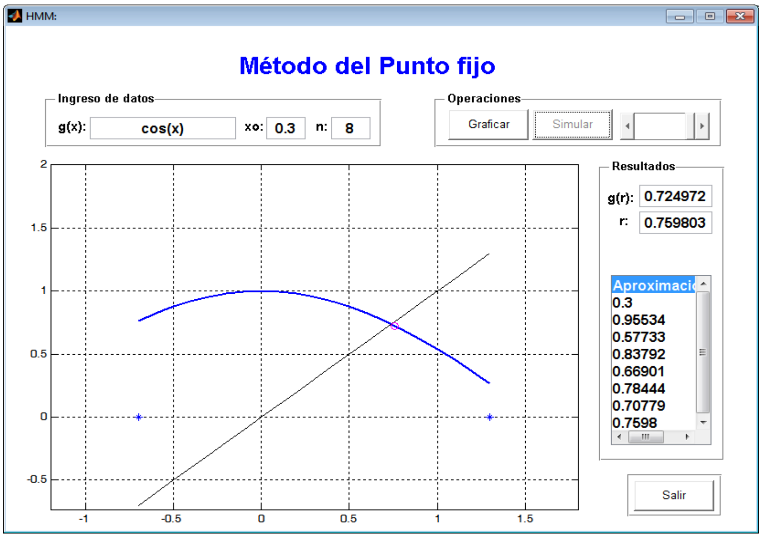
$$x_1, x_2, x_3, \ldots \rightarrow \ldots, p$$



Ejemplo: Hallar la raíz en la ecuación $x - \cos x = 0$.

Solución.- Despejando de la igualdad, tenemos $x = \cos x$, donde $g(x) = \cos x$ es la función asociada del punto fijo.

Consideremos $x_1 = 0.3$ valor inicial.



A continuación se presentan 8 aproximaciones para este punto fijo.

Consideremos el valor inicial $x_0 = 0.3$

$x_1 = 0.9459905421$

$x_2 = 0.58493976040$

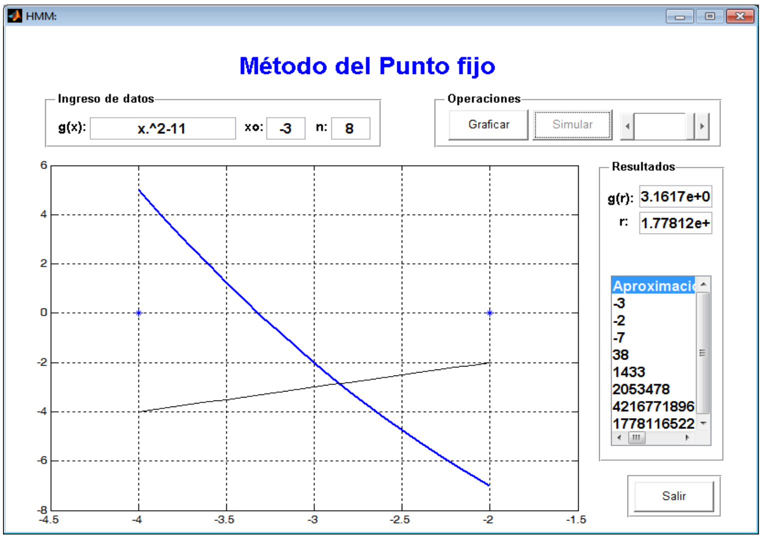
Iteración	**1**	**2**	**3**	**4**
Aproximación	0.3	0.95534	0.57733	0.83792
Iteración	5	6	7	8
Aproximación	0.66901	0.78444	0.70779	0.7598

Ejemplo: Hallar la raíz negativa de la ecuación $x^2 - x - 11 = 0$.

Solución.- Despejando de la igualdad, tenemos $x = x^2 - 11$, donde $g(x) = x^2 - 11$ es la función asociada del punto fijo.

Consideremos $x_1 = -3$ valor inicial.

A continuación se presentan 8 aproximaciones para esta ecuación.



Iteración	1	2	3	4
Aproximación	-3	-2	-7	38
Iteración	5	6	7	8
Aproximación	1433	2053478	42167718964	17781165226

$x_8 = 177811652268845$, como se puede ver las aproximaciones no garantizan convergencia al punto fijo.

Criterio de convergencia

Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua en $[a\,,b]$ y diferenciable $\forall x\in\langle a\,,b\rangle$, la sucesión $x_{n+1}=g(x_n)$ converge, si existe un número $m\in\mathbb{R}\,/\,|g'(x)|\leq m\prec 1,\forall x\in\langle a\,,b\rangle$

Demostración.

Sea p un punto fijo de g, es decir $p=g(p)$ **- - - - (*)**

En la sucesión $x_{n+1}=g(x_n)$ - - - - (1)

Restando (1) de (*), tenemos: $p-x_{n+1}=g(p)-g(x_n)$

Por el teorema de valor medio, existe $c_1\in\langle x_n\,,\,p\rangle$

talque : $g(p)-g(x_n)=g'(c_1)(p-x_n)$

$|g(p)-g(x_n)|=|g'(c_1)||p-x_n|\leq m|p-x_n|$

$|p-x_{n+1}|=|g(p)-g(x_n)|\leq m|p-x_n|$

$|p-x_{n+1}|\leq m|p-x_n|$ - - - - - (a)

En la sucesión $x_n=g(x_{n-1})$ - - - - - - (2)

Restando (2) de (*) tenemos: $p-x_n=g(p)-g(x_{n-1})$

Por el teorema de valor medio, existe $c_2\in\langle x_{n-1}\,,\,p\rangle$

Talque: $g(p)-g(x_{n-1})=g'(c_2)(p-x_{n-1})$

$|g(p)-g(x_{n-1})|=|g'(c_2)||p-x_{n-1}|\leq m|p-x_{n-1}|$

$|p-x_n|=|g(p)-g(x_{n-1})|\leq m|p-x_{n-1}|$

$|p - x_n| \leq m|p - x_{n-1}|$ ----- (b)

En la sucesión $x_{n-1} = g(x_{n-2})$ ------ (3)

Restando (3) de (*) tenemos: $p - x_{n-1} = g(p) - g(x_{n-2})$

Por el teorema de valor medio, existe $c_3 \in \langle x_{n-2}\ ,\ p \rangle$

talque: $g(p) - g(x_{n-2}) = g'(c_3)(p - x_{n-2})$

$|g(p) - g(x_{n-2})| = |g'(c_3)||p - x_{n-2}| \leq m|p - x_{n-2}|$

$|p - x_{n-1}| = |g(p) - g(x_{n-2})| \leq m|p - x_{n-2}|$

$|p - x_{n-1}| \leq m|p - x_{n-2}|$ ----- (c)

Siguiendo el mismo procedimiento de (a), (b) y (c) tenemos:

$$|p - x_{n-k}| \leq m|p - x_{n-(k+1)}|$$

Donde: $|p - x_{n+1}| \leq m|p - x_n| \leq m^2|p - x_{n-1}| \leq \ \ldots \ \leq m^{k+1}|p - x_{n-k}|$

Luego: $|p - x_{n+1}| \leq m^{k+1}|p - x_{n-k}|$

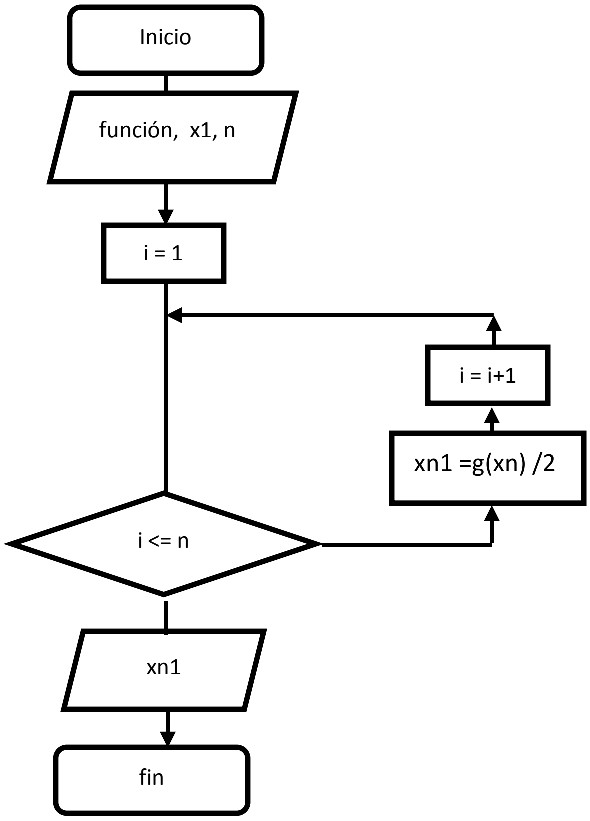
En este proceso iterativo, si $k \to \infty$ entonces:

$m^{k+1} \to 0$ (por ser $m \prec 1$)

$|p - x_{n+1}| \to 0$, $x_{n+1} \to p$

$\therefore$ La sucesión $x_{n+1} = g(x_n)$ converge a p

DIAGRAMA DE FLUJO : Punto Fijo

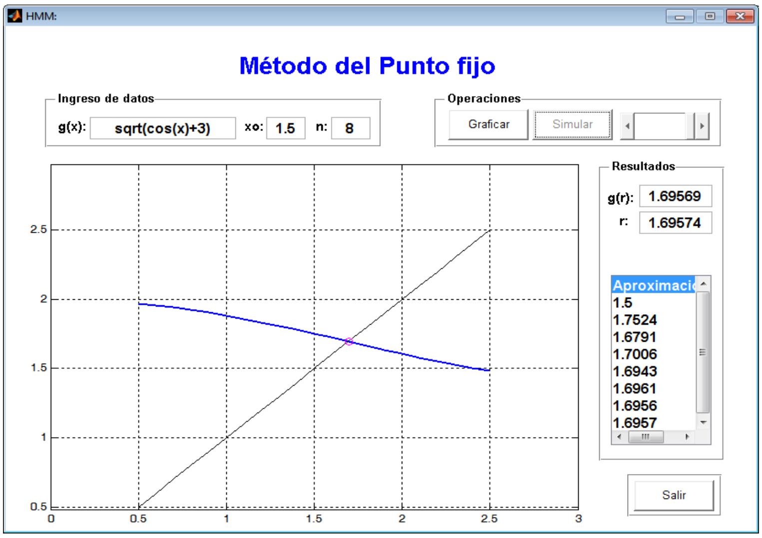


Ejemplo: Hallar la raíz en la ecuación $\cos x - x^2 + 3 = 0$.

Solución.- Despejando de la igualdad, tenemos $x = \pm\sqrt{\cos x + 3}$, donde $g(x) = \sqrt{\cos x + 3}$ es la función asociada del punto fijo para encontrar el valor positivo.

Consideremos $x_1 = 1.5$ valor inicial.

A continuación se presentan 8 aproximaciones para este punto fijo.



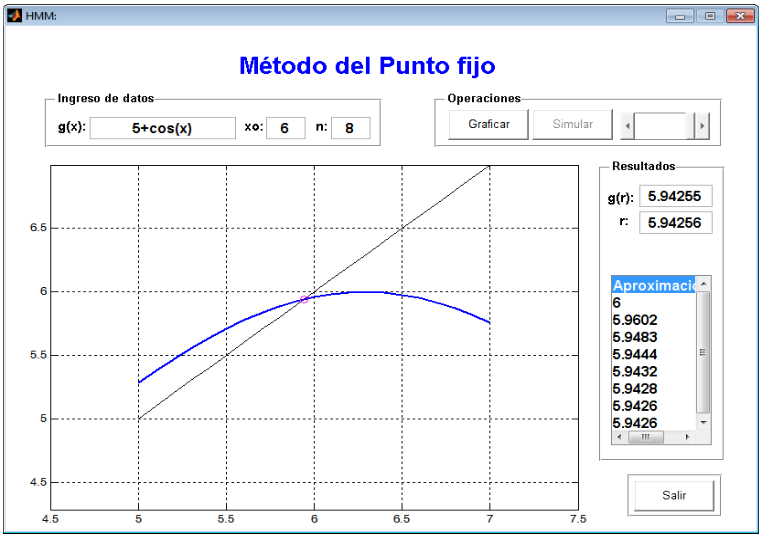
Iteración	1	2	3	4
Aproximación	1.5	1.7524	1.6791	1.7006
Iteración	5	6	7	8
Aproximación	1.6943	1.6961	1.6956	1.6957

Ejemplo: Hallar la raíz en la ecuación $x - 5 - \cos x = 0$.

Solución.- Despejando de la igualdad, tenemos $x = 5 + \cos x$, donde $g(x) = 5 + \cos x$ es la función asociada del punto fijo.

Consideremos $x_1 = 6$ valor inicial.

A continuación se presentan 8 aproximaciones para este punto fijo.



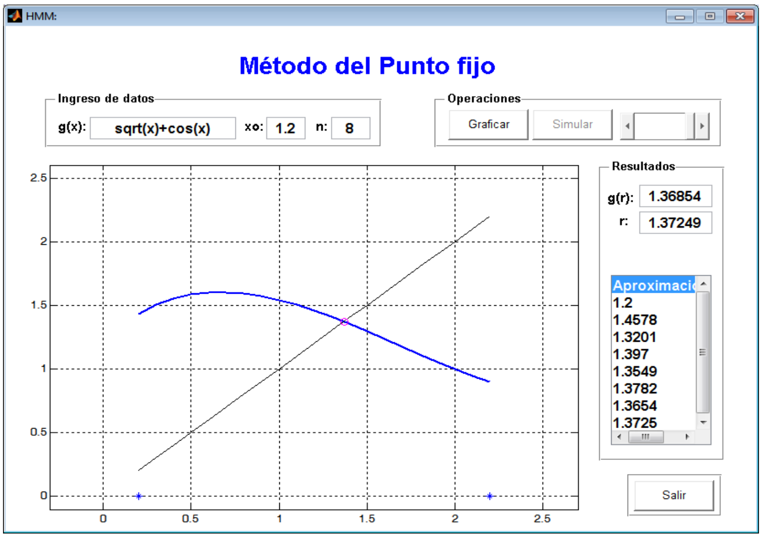
Iteración	1	2	3	4
Aproximación	6	5.9602	5.9483	5.9444
Iteración	5	6	7	8
Aproximación	5.9432	5.9428	5.9426	5.9426

Ejemplo: Hallar la raíz en la ecuación $\sqrt{x} - x + \cos x = 0$.

Solución.- Despejando de la igualdad, tenemos $x = \sqrt{x} + \cos x$, donde $g(x) = \sqrt{x} + \cos x$, es la función asociada del punto fijo.

Consideremos $x_1 = 1.2$ valor inicial.

A continuación se presentan 8 aproximaciones para este punto fijo.



Iteración	1	2	3	4
Aproximación	1.2	1.4578	1.3201	1.397
Iteración	5	6	7	8
Aproximación	1.3649	1.3782	1.3654	1.3725

MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON 1° ORDEN

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua en $[a\,,b]$ y $k+1$ veces diferenciable en $\langle a\,,b\rangle$, tenemos su desarrollo de Taylor alrededor de x_0.

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f\,'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f\,''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+....+R_n \quad ..... (1)$$

Consideremos una aproximación lineal de f en el desarrollo de Taylor, esto es.

$$f(x)\approx f(x_0)+f\,'(x_0)\,(x-x_0) \quad ..... (a)$$

Si x es una raíz de f, entonces en (a) tenemos:

$$0\approx f(x_0)+f\,'(x_0)\,(x-x_0)$$

Despejando x:

$$x\approx x_0-\frac{f(x_0)}{f\,'(x_n)}$$

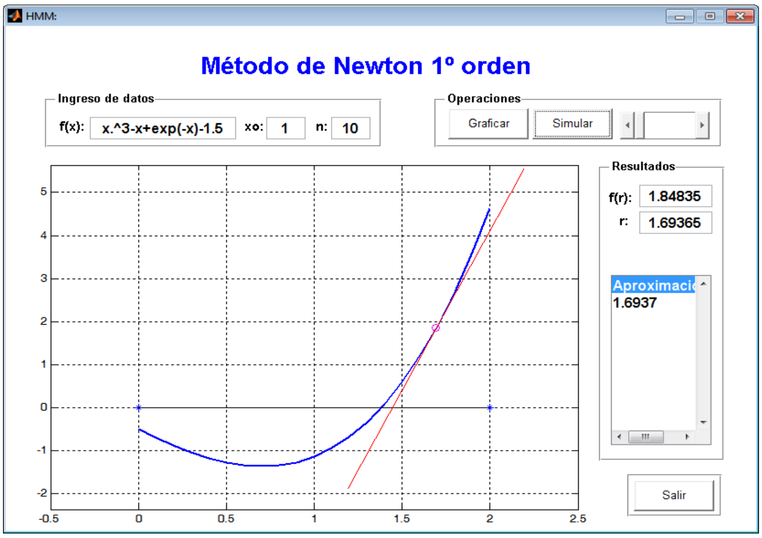
Si x_0 es una aproximación de la raíz de f, se obtiene la fórmula de Newton de 1° orden:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f\,'(x_n)}$$

Observaciones: 1). La función asociada del punto fijo para el método de Newton de 1° orden, está dada por: $g(x)=x-\dfrac{f(x)}{f\,'(x)}$.

2). La aproximación lineal, considera como pendiente a $f\,'(x_0)$ en la construcción de las aproximaciones.

Gráfica:

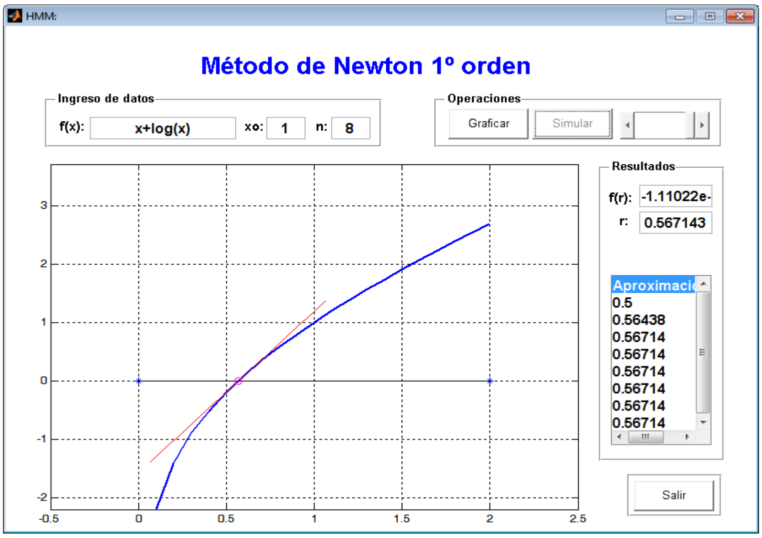


Ejemplo: Hallar la raíz en la ecuación $\ln(\frac{1}{x})^{\frac{1}{x}} - 1 = 0$.

Solución.- Aplicando las propiedades de logaritmos y despejando tenemos: $x + \ln x = 0$, y construimos la función asociada, $f(x) = x + \ln x$.

Consideremos $x_0 = 1$ valor inicial.

A continuación se presentan 8 aproximaciones para esta raíz.



Iteración	1	2	3	4
Aproximación	0.5	0.56438	0.56714	0.56714
Iteración	5	6	7	8
Aproximación	0.56714	0.56714	0.56714	0.56714

Criterio de convergencia

Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ una función continua en $[a\,,b]$ y diferenciable $\forall x\in\langle a\,,b\rangle$, y $g(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$; función asociada del punto fijo para el método de Newton de 1° orden.

$$g'(x)=1-\frac{[f'(x)]^2-f(x).f''(x)}{[f'(x)]^2}=\frac{f(x).f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

Para el cual se garantiza su convergencia si $|g'(x)|\prec 1,\ \forall x\in\langle a\,,b\rangle$.

Reemplazando se obtiene:

$$\left|\frac{f(x).f''(x)}{[f'(x)]^2}\right|<1,\ \ \forall x\in\langle a\,,b\rangle$$

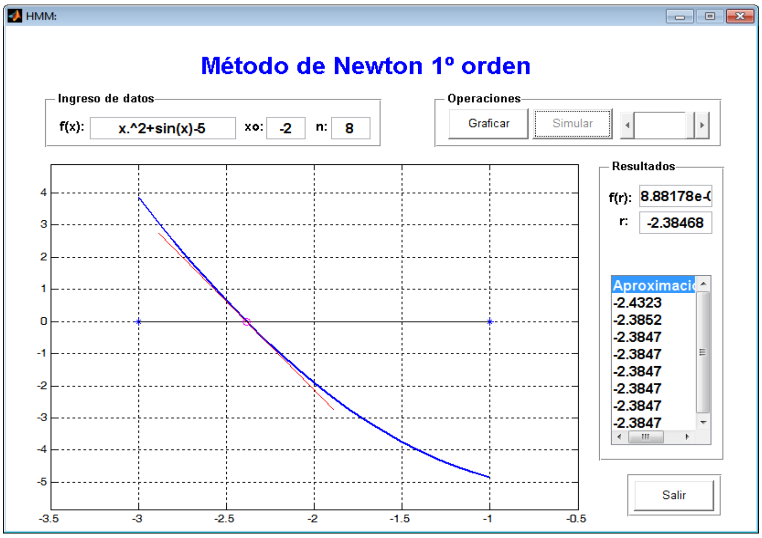
La condición de convergencia del método de Newton Raphson.

Ejemplo: Hallar la raíz en la ecuación $x^2 + \sin(x) - 5 = 0$.

Solución.- Construimos la función asociada $f(x) = x^2 + \sin(x) - 5$

Consideremos $x_0 = -2$ valor inicial.

A continuación se presentan 8 aproximaciones para esta raíz.



Iteración	1	2	3	4
Aproximación	-2.4323	-2.3852	-2.3847	-2.3847
Iteración	5	6	7	8
Aproximación	-2.3847	-2.3847	-2.3847	-2.3847

MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON 2° ORDEN

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua en $[a\,,b]$ y $k+1$ veces diferenciable en $\langle a\,,b\rangle$, tenemos su desarrollo de Taylor alrededor de x_0.

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f\,'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f\,''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+....+R_n \quad ..... (1)$$

Consideremos una aproximación cuadrática de f en el desarrollo de Taylor, esto es.

$$f(x)\approx f(x_0)+f\,'(x_0)\,(x-x_0)+\frac{f\,''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 \quad ..... (a)$$

Si x es una raíz de f y $h=x-x_0$, entonces en (a) tenemos:

$$0\approx f\,''(x_0)\,h^2+2f\,'(x_0)h+2\,f(x_0)$$

Una ecuación de segundo grado en h.

Dónde:

$$h=\frac{-f\,'(x_0)\pm\sqrt{\left[f\,'(x_0)\right]^2-2f\,''(x_0)\,f(x_0)}}{f\,''(x_0)}$$

Reemplazando h por $x-x_0$ y despejando tenemos la fórmula de iteración:

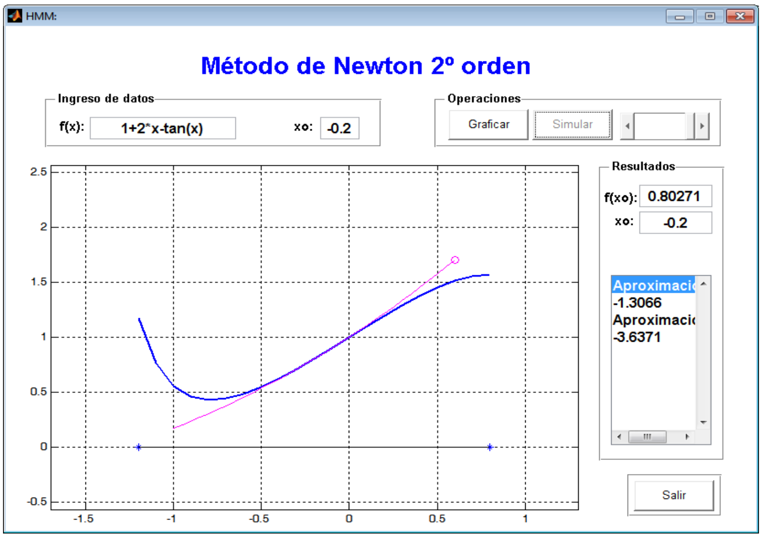
$$x_1=x_0+\frac{-f\,'(x_0)\pm\sqrt{\left[f\,'(x_0)\right]^2-2f\,''(x_0)\,f(x_0)}}{f\,''(x_0)}$$

Ejemplo: Hallar la raíz en la ecuación $1+2x-\tan x=0$.

Solución.- Construimos la función asociada $f(x)=1+2x-\tan x$.

Consideremos $x_0=-0.2$ valor inicial.

A continuación se presentan los valores para la primera aproximación de esta raíz.



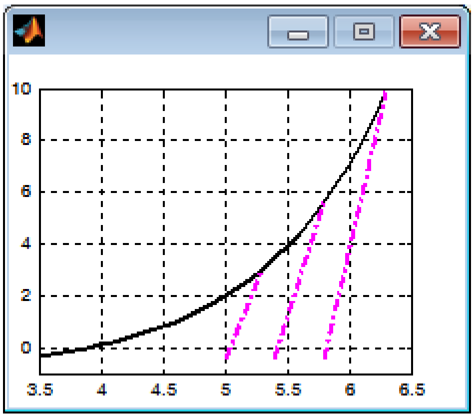
Iteración	Aproximación 1	Aproximación 2
1	-1.3066	-3.6371

MÉTODO DE VON MISES

La fórmula de iteración del método de Newton Raphson de 1° Orden, definido por $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ calcula aproximaciones a la raíz a través de rectas tangentes, lo que para valores $f'(x_n) \to 0$ la recta seria casi paralela al eje X alejando así las aproximaciones de la raíz.

Para resolver este problema Von Mises sustituye $f'(x_n)$ por $f'(x_0)$, donde x_0 es el valor inicial, obteniendo así la fórmula de iteración:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$$

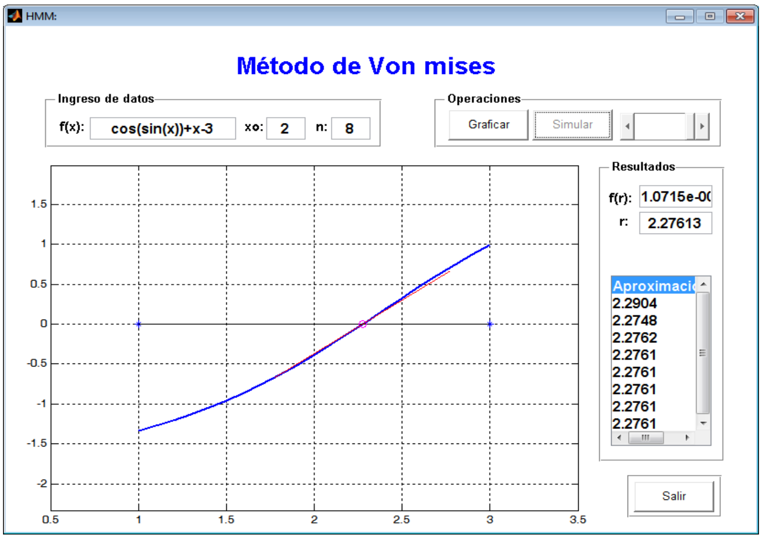


Gráficamente la aproximación es a través de rectas paralelas a la recta tangente en el valor inicial.

Ejemplo: Hallar la raíz en la ecuación $\cos(\sin(x)) + x - 3 = 0$.

Solución.- Construimos la función asociada $f(x) = \cos(\sin(x)) + x - 3$ Consideremos $x_0 = 2$ valor inicial.

A continuación se presentan 8 aproximaciones para esta raíz.



Iteración	1	2	3	4
Aproximación	2.2904	2.2748	2.2762	2.2761
Iteración	5	6	7	8
Aproximación	2.2761	2.2761	2.2761	2.2761

RAÍCES DE UNA FUNCIÓN POLINÓMICA

Proposición. Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, un polinomio de grado n con coeficientes enteros, $b \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{Z}$, b/c una fracción irreducible.

Si b/c es una raíz de P, entonces b es un factor de a_0 y c es un factor de a_n.

Demostración.- Por hipótesis b/c es raíz de f, esto es:

$a_n(b/c)^n + a_{n-1}(b/c)^{n-1} + ... + a_1(b/c) + a_0 = 0$, multiplicando por c^n se obtiene :

$a_n b^n + a_{n-1}b^{n-1}.c + ... + a_1 bc^{n-1} + a_0 c^n = 0$......(*)

Despejando c en (*) **:** $c(\ a_{n-1}b^{n-1} + ... + a_1 bc^{n-2} + a_0 c^{n-1}\ ) = -a_n b^n$, entonces c es un factor de $a_n b^n$ por hipótesis b/c es irreducible, esto significa que c es un factor de a_n, despejando b en (*) **:**

$b(\ a_n b^{n-1} + a_{n-1}b^{n-2}c + ... + a_1 c^{n-1}\ ) = -a_0 c^n$, entonces b es un factor $a_0 c^n$ por hipótesis b/c es irreducible, esto indica que b es un factor de a_0.

Ejemplo.- Hallar las raíces racionales del polinomio:

$$P(x) = 2x^3 - 17x^2 + 38x - 15$$

Solución.- Posibles raíces:

$$\frac{factor(-15)}{factor(2)} = \pm\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{1}, \frac{5}{2}, \frac{15}{1}, \frac{15}{2}$$

Dividiendo:

	2	-17	38	-15	
1/2		1	-8	15	
	2	-16	30	0	resto

$x = 1/2$ es una raíz, además $2x^2 - 16x + 30 = 0$

Factorizando se obtiene $(2x-6)(x-5) = 0$, las raíces son: $\{\, 1/2, 3, 5 \,\}$.

Ejemplo.- Hallar las raíces del polinomio: $P(x) = 3x^3 + 23x^2 - 35x + 9$

Solución.- Posibles raíces:

$$\frac{factor(9)}{factor(3)} = {}^{+}_{-}\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{3}{3}, \frac{9}{1}, \frac{9}{3}$$

Dividiendo:

	3	23	-35	9	
1/3		1	8	-9	
	3	24	-27	0	resto

$x = 1/3$ es una raíz, además $3x^2 + 24x - 27 = 0$

Factorizando se obtiene $(3x-3)(x+9) = 0$, las raíces son: $\{\, 1/3, 1, -9 \,\}$.

Observación.- En el caso que los coeficientes del polinomio son números racionales bastará multiplicar al polinomio por el m.cm. de los denominadores transformándolo en un polinomio con coeficientes enteros.

Ejemplo.- $P(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{3x}{2}+\dfrac{5}{6}$

$m.c.m(2,3,6)=6$, multiplicando a $P(x)$ por 6, se obtiene:

$Q(x)=2x^3+3x^2-9x-5$.

Teorema fundamental del Algebra

Todo polinomio $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ de grado n con coeficientes reales, posee exactamente n raíces reales y/o complejas.

Cambio de Signo de una función polinómica.

Un polinomio $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ ordenado, se dice que posee cambio de signo, si 2 términos consecutivos poseen signos diferentes.

Ejemplo. Sea $P(x)=3x^3-5x^2-6x+7$

P posee 2 cambios de signo.

REGLA DE DESCARTES

Dado un polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

- El número de raíces reales positivas de P, es igual al número de cambios de signos en $P(x)$ o menor que este número en una cantidad par.
- El número de raíces reales negativas de P, es igual al número de cambios de signos en $P(-x)$ o menor que este número en una cantidad par.

Ejemplo.- Sea $P(x) = 3x^3 - 5x^2 - x + 2$

$P(x) = 3x^3 - 5x^2 - x + 2$, posee 2 cambios de signo, entonces P posee 2 raíces reales positivas o cero raíces positivas.

$P(-x) = -3x^3 - 5x^2 + x + 2$, posee 1 cambio de signo, entonces P posee solo 1 raíz real negativa.

Por teorema fundamental el álgebra P posee 3 raíces.

Resumen	**Caso I**	**Caso II**
Raíces (+)	2	0
Raíces (-)	1	1
Raíces complejas	0	2

Ejemplo: Sea $P(x)=x^4-3x^3-x^2+x+5$

$P(x)=x^4-3x^3-x^2+x+5$, posee 2 cambios de signo, entonces P posee 2 raíces reales positivas o cero raíces positivas.

$P(-x)=x^4+3x^3-x^2-x+5$, posee 2 cambios de signo, entonces P posee 2 raíces reales negativas o cero raíces negativas.

Por teorema fundamental el álgebra P posee 4 raíces.

Resumen	**Caso I**	**Caso II**	**Caso III**
Raíces (+)	2	0	0
Raíces (-)	2	2	2
Raíces complejas	0	2	4

Proposición.- Dado un polinomio $P(x)=x^n+...+a_1x+a_0$, las raíces reales de P, satisfacen la relación.

$$\frac{|a_0|}{|a_0|+A}\leq|\,r\,|\leq\frac{|a_n|+A}{|a_n|}$$

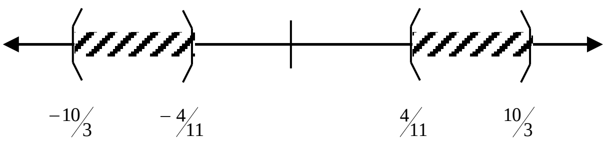
Donde $A=\max|a_j|,\ 0\leq j\leq n$.

Ejemplo: Determinar el intervalo de existencia de las raíces del polinomio:

$$P(x)=3x^5-2x^4+x^2-7x-4$$

Solución: Tenemos $a_0=-4,\ A=7$.

$$\frac{|-4|}{|-4|+7}\leq|\,\mathrm{r}\,|\leq\frac{|3|+7}{|3|}$$



Demostración de la Proposición.

Considerando $\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$, tenemos

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k\right| \le \sum_{k=0}^{n-1}\left|a_k x^k\right| = \sum_{k=0}^{n-1}|a_k|\left|x^k\right| \le A\sum_{k=0}^{n-1}\left|x^k\right| = \sum_{k=0}^{n-1}|x|^k$$

Entonces $\left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k\right| \le A\sum_{k=0}^{n-1}|x|^k$ .... (1)

Por otro lado $1+r+r^2+\ldots+r^{n-1} = \dfrac{1-r^n}{1-r} = \dfrac{r^n-1}{r-1}$,

Esta serie converge si $|\, r \,| \prec 1$.

Caso a) Si $|\, x \,| \succ 1$

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k\right| \le A\sum_{k=0}^{n-1}|x|^k = A\left[\frac{|x|^n-1}{|x|-1}\right] \le \frac{A|x|^n}{|x|-1}$$

entonces $\left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k\right| \le \dfrac{A|x|^n}{|x|-1}$ .... (2)

tenemos que $P(x) = a_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$

$$|P(x)| = \left|a_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k\right| \ge \left|a_n x^n\right| - \left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k\right| \ge \left|a_n x^n\right| - \frac{A|x|^n}{|x|-1}$$

$$|P(x)| \ge \left|a_n x^n\right| - \frac{A|x|^n}{|x|-1} = |a_n||x|^n - \frac{A|x|^n}{|x|-1} = \frac{|x|^n}{|x|-1}\left[|a_n||x| - |a_n| - A\right]$$

Entonces $|P(x)| \ge \dfrac{|x|^n}{|x|-1}\left[|a_n||x| - |a_n| - A\right]$

Acotamos $P(x)$ se debe considerar $\left[|a_n||x| - |a_n| - A\right] \le 0$

Dado que: $\dfrac{|x|^n}{|x|-1}$ es positivo.

De donde si $\left[|a_n||x| - |a_n| - A\right] \leq 0$

$$\left[|a_n||x| \leq |a_n| + A\right]$$

$$|\,x\,| \leq \frac{|a_n| + A}{|a_n|}$$

Caso b) Probar $\dfrac{|\,a_0\,|}{|\,a_0\,| + A} \leq |\,x\,|$

MÉTODO DE VIRGE .VIETA

Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, un polinomio de grado **n** con coeficientes reales, r_1 aproximación de alguna de las raíces reales de P .

Efectuando la división: $P(x)$ entre $x = r_1$ se obtiene:

P:	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	....	a_2	a_1	a_0		
r_1		$r_1 b_{n-1}$	$r_1 b_{n-2}$		$r_1 b_2$	$r_1 b_1$	$r_1 b_0$		
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}		b_1	b_0	$P(r_1)$	$\rightarrow$	resto

$$P(x) = (x - r_1)Q(x) + P(r_1)$$

$$Q(x) = \frac{\mathrm{P}(x) - \mathrm{P}(r_1)}{x - r_1}$$

Aplicando limite a ambos miembros obtenemos:

$$\lim_{x \to r_1} Q(x) = \lim_{x \to r_1} \frac{P(x) - P(r_1)}{x - r_1}$$

$$Q(r_1) = P'(r_1)$$

Efectuando la división: $Q(x)$ entre $x = r_1$ se obtiene:

Q:	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	….	b_1	b_0		
r_1		r_1c_{n-2}	r_1c_{n-3}		r_1c_1	r_1c_0		
	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}		c_0	$Q(r_1)$	$\rightarrow$	resto

Dado que r_1 es una aproximación de la raíz, utilizando el método de Newton se tiene:

$$r_2 = r_1 - \frac{P(r_1)}{P'(r_1)}$$

Generalizando este resultado se obtiene la fórmula de iteración.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{Q(x_n)}$$

Ejemplo.- Determinar una raíz del polinomio:

$$P(x)=3x^5-2x^4+x^2-7x-4$$

Solución.- Analizando el polinomio, existe una raíz cercana a $x=2$, consideremos $r_1=1.5$ como la primera aproximación. Efectuando la división se obtiene:

	3	-2	0	1	-7	-4
1.5		4.5	3.75	5.625	9.938	4.407
	3	2.5	3.75	6.625	2.938	0.407
1.5		4.5	10.5	21.37	41.98	
	3	7	14.25	27.99	44.91	

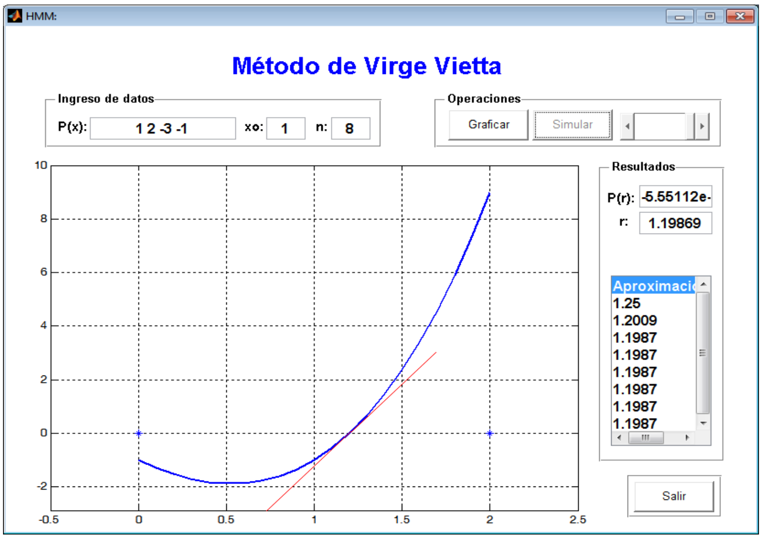
De donde: $r_2=1.5-\dfrac{0.407}{44.91}=1.491$

$r_3=1.4908$

Ejemplo.- Determinar una raíz del polinomio $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 1$

Considerando $r_1 = 1$ valor inicial.

A continuación se presentan 8 aproximaciones para esta raíz.



Iteración	1	2	3	4
Aproximación	1.25	1.2009	1.1987	1.1987
Iteración	5	6	7	8
Aproximación	1.1987	1.1987	1.1987	1.1987

RESULTADOS

En la presente monografía denominada *Solución numérica de ecuaciones algebraicas y trascendentes*, se presentan los siguientes resultados:

- El desarrollo teórico de 7 métodos para la solución aproximada de raíces de ecuaciones algebraicas y trascendentes.
- El desarrollo teórico de 1 método para la solución aproximada de raíces de ecuaciones algebraicas.
- La aplicación de los diversos métodos a un conjunto de ecuaciones algebraicas y trascendentes.

BIBLIOGRAFIA

01 AKAI, Terrence(2005). Métodos Numéricos Aplicados a la Ingeniería. Edit. LIMUSA México.

02 ATIKINSO, Eubell(1985). Introducción al Análisis y Métodos Numéricos. Edit. Iberoamericana, México.

03 CRAKER, MC.(1980). Métodos Numéricos con Fortran. Edit. Trillas, México.

04 CHAPRA, Steve(1974.) Numerical Methods for Engineers, With Personal Computer Application.Edit. Rueda, Madrid.

05 FARLOW, S(2008) Partial Differential Equation for Scientists and Engineers. Edit. Rueda, Madrid.

06 MORALES H(2011). MatlabR2010a. Métodos Numéricos con visualización gráfica. Editorial Megabyte. Lima . Perú.

07 NAKAMURA(1996). Análisis Numérico y Visualización Gráfica con Matlab. Edit. Prentice Hall Hispanoamericana.

08 PAIHUA, Luis(1990). Métodos Numéricos. Edit. UNI, Lima – Perú.