UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SANTA

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES

ESCUELA ACADÉMICA PROFESIONAL DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

"CREENCIAS Y PERCEPCIONES SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE ESTUDIANTES DE MATEMÁTICA EN LA UNS"

MONOGRAFÍA PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN

ESPECIALIDAD FÍSICA Y MATEMÁTICA

AUTOR

Bach. JHONNY FLORENTINO RAMOS LABORIO

ASESOR

Ms. TEODORO MOORE FLORES

NUEVO CHIMBOTE – PERÚ

2016

HOJA DE CONFORMIDAD DEL ASESOR

Yo: Ms. TEODORO MOORE FLORES, Autorizo la conformidad de la monografía para obtener el título profesional de Licenciado en Educación Especialidad Física y Matemática titulado "CREENCIAS Y PERCEPCIONES SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE ESTUDIANTES DE MATEMÁTICA EN LA UNS", por haber cumplido con los requisitos mínimos y la estructura académica básica para ser presentado y definido ante un jurado.

Atentamente;

Ms. TEODORO MOORE FLORES

ASESOR

HOJA DE CONFORMIDAD DEL JURADO EVALUADOR

Terminada la sustentación de la monografía titulada: “CREENCIAS Y PERCEPCIONES SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE ESTUDIANTES DE MATEMÁTICA EN LA UNS”, se considera aprobada al Joven Jhonny Florentino Ramos Laborio, dejando constancia de ello el jurado integrado por :

____

Dr. Ernesto Antonio Cedrón León

Presidente

____

Ms. Teodoro Moore Flores

Integrante

____

Dr. Juan Herón Morales Marchena

Integrante

DEDICATORIA

A Dios Todo poderoso, Por:

Concederme La Existencia Y Facilitarme las Condiciones para Ser profesional.

A Mis Padres:

Víctor Ramos y Lucila Laborio, por haberme brindado amor y comprensión incondicionalmente.

AGRADECIMIENTO

Expreso mi especial gratitud en primer lugar al omnipotente, creador de la humanidad, por permitirme tener aún suspiros y guiar mi camino en el logro de mis metas, además por hacerme feliz ahora que veo cerca el anhelo de verme pronto realizado como profesional en Educación; en segundo lugar a mis padres, por el apoyo incondicional y continuo, además por sus consejos y preocupaciones por el trabajo académico y mi bienestar; es peculiar mi reconocimiento a quienes me apoyan desinteresadamente por ser comprensibles ante mis exigencias, también hago extensivo a los docentes de la Universidad Nacional del Santa; y de manera especialísima al asesor de la presente investigación, Ms. Teodoro Moore Flores, por despertar en mi nuevas perspectivas en el campo de la investigación científica y formación profesional como docente de Física y Matemática.

JHONNY RAMOS

PRESENTACIÓN

Señores miembros del jurado:

El presente trabajo descriptivo explicativo, cuyo título responde a "CREENCIAS Y PERCEPCIONES SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE ESTUDIANTES DE MATEMÁTICA EN LA UNS", para el autor, constituye uno de los elementos fundamentales para la obtención del título de Licenciado en Educación Secundaria en la Especialidad de Física y Matemática, en consecuencia ha sido estructurado en el marco de la formalidad y según los criterios teórico científico que en la actualidad se puede encontrar en el ámbito de nuestra realidad.

La presente investigación bibliográfica ha condicionado nuestro accionar no sólo a revisar libros, sino a navegar en internet y encontrarnos con algunas particularidades por ello, se pone a consideración a ustedes señores miembros del jurado evaluador.

INDICE

CAPÍTULO II

CAPÍTULO III

CAPÍTULO IV

CAPÍTULO V

INTRODUCCIÓN

La presente investigación monográfica, tiene como finalidad expresar teóricamente de manera descriptiva, lo relacionado con las creencias y perspectivas sobre la enseñanza y aprendizaje de estudiante de matemática en la Universidad Nacional del Santa, en consecuencia ha sido dividido en cinco capítulos, el primero describe cómo se realiza la formación docente, en el que se incluyen tópicos como la matemática y la formación docente, que sistemas intervienen en la formación de los profesores de matemática, cómo los sistemas didácticos están relacionados con la formación de profesores, las reflexiones sobre los sistemas de matemática, de qué manera la etimología influye en la matemática, cuales son los cambios permanentes que hay en el desarrollo de la enseñanza de la matemática y algunas tesis propuestas por los especialistas a fin de que los docentes tengan el dominio didáctico en la enseñanza de la materia.

En el Capítulo II, explica la importancia de las creencias y concepciones de los profesores que van a ser formados para la enseñanza de la matemática, de igual forma se expone algunas experiencias realizadas a través de investigaciones, la caracterización de lo que implica una creencia y al final de dicho capítulo se expone la delimitación de los constructores y concepciones y creencias de la presente investigación; En el capítulo III, se expone las formas de concebir, el conocimiento la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, por lo que se ha hecho una exposición de la epistemología en la matemática, el conocimiento matemático, la visión epistemológica de la educación matemática, las formas de aprendizaje de la matemática y por último qué es lo que significa aprender, incluyendo tópicos que se refieren a qué es la matemática en el marco del saber, cómo se aprende la matemática, y cómo se tiene que enseñar la matemática.

En el Capítulo IV, se presenta resultados de la aplicación de una encuesta de creencias y percepciones sobre la enseñanza y aprendizaje a los estudiantes de la matemática de la Universidad Nacional del Santa.

En el quinto y último capítulo se exponen las conclusiones y sugerencias de la presente investigación para luego se tenga que anunciar cada uno de los elementos teóricos en la investigación monográfica.

Los objetivos centrales que orientaron el desarrollo de la presente investigación fueron los siguientes:

a) Describir teóricamente el significado de esencia y de forma de lo que implica la formación docente.
b) Exponer desde el punto de vista científico la relación que existe la matemática con las creencias y percepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de estudiantes de matemática.
c) Describir explícitamente las formas de concebir el conocimiento, la enseñanza y el aprendizaje de la matemática
d) Aplicar y analizar la encuesta de las creencias y percepciones sobre la enseñanza y aprendizaje a los estudiantes de matemática de la Universidad Nacional del Santa.

CAPÍTULO I

LA FORMACIÓN DOCENTE

1.1. La matemática y la formación docente

La matemática es la ciencia deductiva que se dedica al estudio de las propiedades de los entes abstractos y de sus relaciones. Esto quiere decir que las matemáticas trabajan con números, símbolos, figuras geométricas, etc.

A partir de axiomas y siguiendo razonamientos lógicos, la matemática analiza estructuras, magnitudes y vínculos de los entes abstractos. Esto permite, una vez detectados ciertos patrones, formular conjeturas y establecer definiciones a las que se llega por deducción.

Además de lo expuesto no se puede pasar por alto que existen dos importantes tipos de matemática:

La matemática pura, que se encargan de estudiar la cantidad cuando está considerada en abstracto.

La matemática aplicada, que proceden a realizar el estudio de la cantidad pero siempre en relación con una serie de fenómenos físicos.

La matemática trabaja con cantidades (números) pero también con construcciones abstractas no cuantitativas. Su finalidad es práctica, ya que las abstracciones y los razonamientos lógicos pueden aplicarse en modelos que permiten desarrollar cálculos, cuentas y mediciones con correlato físico.

Podría decirse que casi todas las actividades humanas tienen algún tipo de vínculo con la matemática. Esos vínculos pueden ser evidentes, como en el caso de la ingeniería, o resulta ser menos notorios, como en la medicina o la música.

Es posible dividir la matemática en distintas áreas o campos de estudio. En este sentido puede hablarse de la aritmética (el estudio de los números), el álgebra (el estudio de las estructuras), la geometría (el estudio de los segmentos y las figuras) y la estadística (el análisis de datos recolectados), entre otras.

Mendoza B. (2008) A lo largo de la Historia han existido importantes matemáticos que han destacado por las aportaciones y descubrimientos que han realizado. En concreto, entre los más significativos se encuentran los siguientes:

Pitágoras (569 a.C – 475 a.C). Fue un matemático griego, considerado el primero “puro”, que realizó importantes avances en materias tales como la aritmética o la geometría. No obstante, quizás su aportación más significativa es la del famoso teorema que lleva su nombre.

Isaac Newton (1643 – 1727). Este inglés está catalogado como otro de los matemáticos más fundamentales de la historia del ser humano. Esto es debido, entre otras cosas, a que llevó a cabo el desarrollo del cálculo integral y diferencial.

Leonhard Euler (1707 – 1783). Este alemán está considerado como el más importante matemático del siglo XVIII al tiempo que uno de los más prolíficos hasta el momento. Realizó significativas contribuciones en cuanto a la geometría, a la notación matemática, a la lógica o a la matemática aplicada.

Cabe destacar que, en la vida cotidiana, solemos recurrir a la matemática de manera casi inconsciente. Cuando vamos a una verdulería y compramos un kilo de tomates, el vendedor nos dice el precio y nosotros realizamos inmediatamente un cálculo básico para saber con qué billete pagar y cuánto vuelto tenemos que recibir.

La Matemática es una asignatura que no deja indiferente a ningún estudiante. Algunos la aman y otros la odian; siendo este segundo grupo mucho más numeroso que el primero, en la mayoría de las ocasiones. Sin embargo, muchos de los estudiantes que odian la matemática lo hacen porque no saben cómo estudiar matemática para obtener buenos resultados.

La Matemática, es igual a decir práctica, práctica y más práctica. Es imposible aprender matemática leyendo y escuchando. Para aprender matemática amerita tiempo, concentración, perseverancia y proponerse a desarrollar ejercicios de matemática. Cuanto más practiques, mejor será el resultado. Cada ejercicio tiene sus particularidades y es importante haber realizado el máximo número de ejercicios posibles antes de enfrentarnos al

examen. Este punto es el más importante de todos y la base del resto de técnicas para estudiar matemática.
La Matemática y las dificultades en el proceso de resolución de ejercicios, es muy importante que compruebes los resultados y, más importante aún, que te detengas en la parte que has fallado y examines el proceso en detalle hasta asimilarlo. De nada sirve comparar resultados si no sabes en qué te has equivocado. Por eso es conveniente que tengas unos buenos apuntes con problemas resueltos. De esta manera, evitarás cometer los mismos fallos en el futuro. También es recomendable apuntar todos tus errores y repasarlos repetidamente antes del examen.

La matemática y los conceptos clave; no intentes aprenderte los problemas de memoria, los problemas matemáticos pueden tener miles de variantes y particularidades, por lo que no es correcto memorizar los problemas sin entenderlos. Lo correcto es dominar los conceptos importantes y el proceso de resolución de los problemas.

Recuerda que la matemática es una asignatura secuencial, por lo que es importante asentar una base firme dominando los conceptos claves y teniendo claras las fórmulas de matemática esenciales. La matemática y tus dudas, puede que en muchas ocasiones te sientas atascado en una parte de un problema o que simplemente no entiendas el proceso. Lo común en estos casos es simplemente pasar de ese problema y pasar al siguiente. Sin embargo, es recomendable despejar todas las dudas que tengas en la resolución de un problema.

Por tanto, puede ser buena idea estudiar junto a algún compañero con el que consultar dudas y trabajar juntos en problemas más complejos. Asimismo, recuerda plantearle al profesor las dudas que tengas, ya sea en clase o en una tutoría.
La matemática y el ambiente de estudio, la matemática es una asignatura que requiere más concentración que ninguna otra. Un ambiente de estudio adecuado y libre de distracciones puede ser el factor determinante para

conseguir resolver ecuaciones o problemas de geometría, álgebra o trigonometría complejos.

1.2. Sistemas que intervienen en la formación de profesores de matemática

Godino y Batanero (1994), han estudiado de manera sistémica el significado de los objetos matemáticos, los relacionan con los sujetos que se enfrentan o refrendan la solución de campos de problemas, en el seno de una institución. En este artículo adoptamos esta idea de relacionar el conocimiento con unos sujetos y unos problemas, y aceptamos que también los objetos en Didáctica de la Matemática adquieren su significado en relación con campos de problemas, que ciertos sujetos perciben y tratan en el seno de una institución. Esta visión sistémica nos ha ayudado a diferenciar planos de reflexión.

Entre todos los sistemas didácticos que intervienen en la enseñanza de la matemática y en la formación de profesores de matemática, vamos a destacar los sistemas de la enseñanza reglada, en los que existe un profesor, un conocimiento objeto de esta enseñanza, y un estudiante. Este sistema tendrá una caracterización ligada a la institución en que se desarrolla.

La reflexión investigadora sobre la enseñanza de la matemática parte del estudio de varios sistemas didácticos. Vamos a destacar dos sistemas relacionados con nuestra tarea en la Facultad de Ciencias de la Educación: el sistema reglado de enseñanza de la matemática y el de la formación reglada inicial de profesores. A estos sistemas didácticos añadiremos en este epígrafe el sistema en el que los matemáticos y los técnicos emplean la matemática.

La reflexión sobre estos sistemas puede hacerse de formas variadas, según el objeto de análisis, el fin que se pretenda con la reflexión, los sujetos que la emprendan, y los sujetos que están siendo analizados.

1.2.1. Sistemas didácticos relacionados con la formación de profesores

En la enseñanza reglada obligatoria, encontramos el sistema didáctico formado por el profesor de matemática, los alumnos del nivel educativo, y los contenidos de matemática. Los profesores se encuentran en este sistema en un plano de actuación práctica, en el que tienen que tomar decisiones y actuar. Los profesores que participan en este sistema didáctico ponen en juego un conocimiento profesional que se constituye en objeto de estudio para los investigadores teóricos en didáctica. En este conocimiento se incluyen distintos tipos de conceptos, destrezas y actitudes. Un análisis que nos parece especialmente interesante de este conocimiento profesional es el que hace Shulman (1986), en forma de conocimiento didáctico del contenido.

El proceso de formación de profesores de matemática abarca un sistema didáctico formado por el conocimiento profesional del profesor, el profesor en formación (como alumno de este sistema), y el formador de profesores.

El conocimiento profesional del profesor es objeto de estudio de las investigaciones que afrontan la formación de profesores de matemática. El conocimiento matemático escolar procede de dos fuentes. La fuente primaria es la que proviene de la propia matemática. Posteriormente, este conocimiento matemático se transpone (Chevallard, 1985) en conocimiento matemático escolar. Parece claro que el conocimiento matemático proviene de la investigación en matemática. Sin embargo, el conocimiento matemático escolar tiene orígenes variados. En un principio, el conocimiento matemático escolar se obtuvo por una simplificación del conocimiento matemático para su enseñanza. Actualmente, este conocimiento es objeto de investigación en el terreno de la Didáctica de la Matemática, y los conceptos, y los criterios de organización y de validación parece que están más consensuados. Este consenso está más claro en la enseñanza primaria, en la que se aceptan unos conocimientos matemáticos escolares que se diferencian, no sólo cuantitativamente sino también cualitativamente, de los conocimientos matemáticos que se investigan y desarrollan en los Departamentos universitarios de la Facultad de Ciencias.

1.2.2. Tres reflexiones sobre los sistemas

Los tres sistemas presentados tienen influencia entre sí, ya que cada uno de ellos produce o recoge aspectos que derivan de los demás. Centrándonos en el sistema didáctico de la clase de matemática, estamos en presencia de un profesor de matemática, que ha tenido que formarse en un sistema de formación de profesores, y a su vez utiliza un conocimiento matemático, que está utilizándose en el sistema matemático práctico. Pero además, el profesor puede emplear un conocimiento derivado de la reflexión teórico - investigadora que realiza el especialista en Didáctica de la Matemática. Incluso se interesará en la consideración epistemológica sobre la naturaleza de los dos tipos de conocimiento que está empleando: el matemático y el didáctico.

Vamos a diferenciar las reflexiones que se realizan sobre los conocimientos que se están poniendo en juego, distinguiendo, para ello, las actuaciones de cada grupo de sujetos. De esta forma nos resultará más fácil percibir las características de nuestra actuación cuando adoptamos un papel: de profesor de matemática de secundaria, de formador de profesores, o de investigador, tanto en Didáctica de la Matemática en general, como en Formación de Profesores de Matemática, en particular.

1.3. La matemática y la práctica

Entre los sujetos que forman parte de un sistema didáctico vamos a diferenciar el director y el dirigido. El primero es el responsable de la marcha del sistema. En el sistema didáctico de la clase de matemática, el director es el profesor, y el dirigido el alumno. En el sistema didáctico de la formación de profesores, el director es el formador de profesores, y el dirigido el profesor en formación. En el sistema matemático-práctico, el matemático/usuario es el director, aunque hay que reconocer que en los tres sistemas las direcciones están mediatizadas por elementos contextuales de carácter social, (Rico, 1997)

Los tres sistemas exigen del sujeto que los dirige una actuación práctica que tiene puntos de semejanza. El matemático práctico se enfrenta a problemas del ámbito en el que se sumerge, y los resuelve a partir de su preparación científica matemática, y de sus conocimientos estratégicos de carácter práctico. Igualmente, el profesor se sirve de sus conocimientos matemáticos y de la matemática escolar, así como de sus estrategias prácticas derivadas del desenvolvimiento en la profesión. Esta misma consideración cabe hacerla del formador de profesores. Es decir, en los tres sistemas, los sujetos que dirigen la acción están haciendo uso de un conocimiento práctico sobre los problemas que se suelen plantear en el medio en el que se mueven.

Cuando los matemáticos prácticos se reúnen entre sí para hablar de sus problemas, comparten fundamentalmente el conocimiento práctico sobre cómo afrontar tal o cual problema, o sobre las estrategias para resolver problemas de intendencia. Esto mismo se podría aplicar a los profesores o a los formadores de profesores: sus reuniones profesionales son una ocasión de compartir frustraciones, expectativas, y algunos principios prácticos. Para dar validez a estos conocimientos prácticos se recurre a la eficacia práctica, sin que se concrete lo que esto quiere decir, sin apoyarse en estudios de carácter estadístico, y sin que haya sido objeto de tratamiento científico profundo. Y esto es legítimo y necesario, ya que el profesor, el formador de profesores y el matemático práctico necesitan resolver sus problemas prácticos, independientemente de que se esté investigando sobre estos problemas. Esta necesidad está motivada por la inmediatez.

A los formadores de profesores nos son útiles los textos, artículos y conversaciones en los que nos relatan experiencias de aula. Aunque dichas experiencias no hayan pasado por el filtro de la investigación para establecer su valor. Además, los formadores de profesores de matemática tenemos nuestras propias jornadas prácticas. Estas son un lugar de encuentro entre formadores de profesores de matemática en una reflexión de carácter práctico. También las jornadas de profesores de Matemática son ocasión para que los profesores pongan en común sus experiencias sobre su actuación práctica. Entre estas experiencias algunas tienen un fin innovador en la enseñanza de la matemática, y en ellas un profesor se ha documentado para poner en juego una estrategia novedosa, que considera que encaja en el marco actual de la enseñanza de la matemática. Cuando en estos congresos de reflexión práctica para profesores, un investigador en Didáctica de la Matemática presenta sus resultados de investigación, que están en proceso de reflexión teórica y no se han convertido en propuestas para el aula, se produce un choque.

1.4. La matemática y la reflexión teórico-investigadora

Antes nos hemos fijado especialmente en los sujetos participantes en los tres sistemas descritos. Analicemos ahora el tipo de conocimiento que se emplea en cada sistema.

Para que el conocimiento práctico del profesor de matemática se convierta en conocimiento profesional, utilizable como contenido en el sistema de formación de profesores de matemática, hace falta consensuar este conocimiento, darle fundamento relacionándolo con la forma en que se interpreta la tarea del profesor de matemática. En resumen, hace falta analizar la forma en que se desarrolla el sistema didáctico de la enseñanza de la matemática, y de ahí extraer las destrezas de las que tiene que disponer el profesor. Para realizar esta reflexión se requieren criterios de validez distintos de los de la reflexión práctica. Ya no hay tanta urgencia en su establecimiento. (Al mezclarse los sistemas, por carecer de la perspectiva teórica, los cursos de formación de profesores de matemática, hasta hace relativamente poco tiempo, se centraban en conocimientos matemáticos, haciendo abstracción de un conocimiento didáctico del que no se disponía, y añadiendo, en todo caso, alguna reflexión derivada de la práctica docente en clase de matemática de enseñanza obligatoria.).

También el conocimiento matemático proviene de una reflexión teórica sobre la actuación del matemático práctico frente a los problemas, o sobre la actuación del investigador matemático frente a los problemas que se han planteado con antelación. Igualmente este conocimiento ha sido consensuado socialmente, por la comunidad correspondiente.

Finalmente, también la investigación en formación de profesores reflexiona de manera teórica sobre el sistema de formación de profesores de matemática, para llegar a establecer conocimientos que puedan facilitar la tarea en un futuro a los formadores de profesores.

Todos estos conocimientos teóricos sobre la enseñanza, la formación de profesores y la matemática, derivan pues, de una reflexión realizada desde una perspectiva teórico-investigadora. Esta reflexión se diferencia de la que se realiza en el plano práctico en que las personas que la llevan a cabo se sitúan en una perspectiva diferente, y que necesita criterios de validación más potentes. Los problemas que se afrontan en esta reflexión no tienen que ser resueltos inmediatamente. De ella surgirá el conocimiento matemático, analizando el sistema del matemático-práctico, y el conocimiento en Didáctica de la Matemática, analizando tanto el sistema didáctico de enseñanza de la matemática como de la formación de profesores de matemática. En el caso particular en que se analice el sistema de formación de profesores, va a surgir un conocimiento didáctico referido a este campo de actuación.

Los sujetos que realizan este tipo de reflexión son investigadores en sus ámbitos respectivos. Los investigadores en Didáctica de la Matemática se preguntan, respecto a las matemáticas escolares: ¿Cómo se hace la transposición desde el conocimiento matemático a la matemática escolar? ¿Cuáles son las finalidades educativas de la matemática escolar? Refiriéndose a los alumnos se preguntan: ¿Cómo aprenden la matemática estos alumnos? Respecto a los profesores, ¿Cómo enseñan la matemática?

Los investigadores en Didáctica de las Matemática que se ocupan de la formación de profesores de matemática se hacen preguntas, sobre el conocimiento profesional: ¿Qué es el conocimiento profesional del profesor de matemática? ¿Qué componentes tiene? ¿Qué naturaleza tiene? También se interrogan sobre los profesores en formación, ¿Cómo aprenden a enseñar matemática? En relación con los formadores de profesores, se preguntan ¿Cómo enseñar a enseñar matemática? ¿Cómo llevar a cabo la formación de formadores de profesores de matemática?

1.5. La matemática y la reflexión epistemológica

Con el presente trabajo se está planteando cuestiones acerca de la naturaleza del conocimiento. Con una reflexión epistemológica sobre los planos didácticos. En concreto, esta reflexión ha surgido de la necesidad de clarificar nuestra posición cuando actuamos de manera docente e investigadora en la formación de profesores de matemática.

Es común entre los investigadores abordar cuestiones epistemológicas, cuando necesitan aclarar el tipo y las características del conocimiento que están intentando producir (Godino y Batanero, 1994). Aunque también el investigador puede realizar su tarea sin profundizar en aspectos epistemológicos, cuando se cuestiona sobre aspectos que no afectan a la naturaleza del conocimiento.

La reflexión epistemológica se realiza desde una perspectiva distinta de la que ocupa el investigador en didáctica, o en matemática. Sus problemas provienen de relacionar unas ciencias con otras, de buscar las características de esas ciencias, el significado de los objetos que estudian las ciencias, la historia del conocimiento y los criterios por los que una ciencia acepta como válido el conocimiento. Entendemos, pues, que éste constituye un tercer escalón de reflexión, que puede o no adoptar el investigador en Didáctica de la Matemática, y el profesor.

El epistemólogo que estudia el conocimiento matemático contempla el sistema matemático práctico y la investigación en matemática, y estudia la naturaleza del conocimiento matemático, su relación con la naturaleza y con el conocimiento científico en general.

La reflexión epistemológica sobre la enseñanza de la matemática analiza la naturaleza del conocimiento didáctico, su historia, su relación con otros conocimientos científicos, las formas de obtención de nuevos conocimientos y los criterios de validación de los mismos.

Los sujetos actúan frente a los problemas en dos direcciones ortogonales. Si actúan y reflexionan dentro de un plano, sin trascenderlo, para buscar soluciones a los problemas, están realizando una actuación práctica. Cuando están situándose en un plano, contemplan los elementos de otro plano suelen hacerlo desde una perspectiva teórico-investigadora. Los profesores que comparten con sus compañeros destrezas y experiencias para afrontar los problemas cotidianos, están realizando una reflexión de carácter práctico, pero si se distancian de sus posiciones para afrontar el proceso de enseñanza, y se plantean como objetivo producir algún tipo de conocimiento didáctico, entonces se sitúan en una perspectiva teórica. Los investigadores realizan una reflexión teórico-investigadora cuando analizan el plano de la práctica, pero cuando comparten con otros investigadores los sistemas de trabajo, las destrezas, los procesos, están actuando de una manera práctica.

1.6. Los profesores de matemática acerca de la enseñanza de matemática

La formación de profesores de Matemática, implica que en cada momento existe una tarea que se adopta, especialmente cuando nos relacionamos con otras personas que forman parte de un sistema de formación como profesores. Se hace preciso que distingamos la preocupación práctica que adoptamos cuando compartimos con los compañeros asuntos relacionados con la formación de profesores, o con investigadores, de la preocupación teórica que adoptamos cuando investigamos. Esto no significa que tengamos que hacer un esfuerzo por duplicar la personalidad en ocasiones en que estemos debatiendo aspectos que nos afectan de manera práctica y teórica, sino que trata de que tengamos claros nuestros roles. Sólo teniendo claros estos roles podremos aclarar nuestras creencias relacionadas con la formación de profesores.

El análisis del rol del profesor nos ha hecho percibir la diferente naturaleza del discurso que puede adoptar el profesor, según sus interlocutores y los contextos. Con la clasificación establecida en el artículo hemos percibido de manera más clara lo que puede diferenciar las dos actuaciones que Elliot (1993) distingue, entre la de un profesional práctico tecnológico - que se interesa en la resolución de problemas inmediatos, y el práctico reflexivo, que se ocupa de profundizar y fundamentar antes de tomar decisiones. Tal como hemos planteado en otros trabajos (Flores, 1997), lo que intentó es clarificar que la pretensión de un profesor que sea un práctico reflexivo no es una frase vacía, sino que está concibiendo al profesor como un profesional que puede separarse de su rol práctico para sentirse investigador en su trabajo, es decir, con capacidad de realizar una reflexión teórica, mediata, fundamentada, sobre los problemas que derivan de su tarea profesional. El análisis presentado trata de suministrar, como hace Elliot (1991), un esquema para que el profesor, y el formador de profesores en su caso, sepa distinguir Cuándo su reflexión en la acción está fundamentada en problemas prácticos (con qué material puedo conseguir mejor estos fines), y Cuándo está fundamentada en problemas teóricos (qué tipo de enseñanza estoy consiguiendo con estas estrategias, cuál es el currículum oculto que no estoy controlando, etc.). De este modo, desde este análisis, estamos abogando por una perspectiva crítica de la enseñanza, y eso no está reñido con que estén claros los fines de mi actuación en cada momento.

1.7. Cambios en la enseñanza de la matemática.

Los cambios en la organización social y el crecimiento cuantitativo y cualitativo de la tecnología han repercutido en la educación matemática. La reforma de la enseñanza de la matemática que está en curso (Carl, 1989; NCTN, 1991; MEC, 1992) aboga por una matemática abierta para todos los alumnos y por un método más participativo de enseñanza, con mayor protagonismo del alumno, ya que se pone el énfasis en el "proceso" de hacer matemática, más que considerar el conocimiento matemático como un "producto" acabado.

Esta nueva perspectiva en la enseñanza de la matemática se fundamenta en una consideración epistemológica particular de la propia matemática.

1.7.1. La matemática cambia permanentemente.

La matemática evoluciona continuamente, y están relacionadas con otros conocimientos. Esto implica que no convenga presentar como un producto cerrado y que los problemas de otras áreas proporcionen terreno para nuevos conocimientos matemáticos.

1.7.2. La matemática siempre como matemática.

Plantea la distinción entre cómo se presentan la matemática y cómo se transmiten y adquieren. Afirma que la construcción del conocimiento matemático es inseparable de la actividad sobre los objetos.

1.7.3. La matemática no se aparta de su esencia.

Enfatiza el carácter constructivo del conocimiento matemático, empleando métodos efectivos; todo su accionar se circunscribe al quehacer de la disciplina, a la vez sirve como apoyo a las demás ciencias de la humanidad. (Rico y Sierra, 1994).

1.7.4. Algunas tesis propuestas por Steiner

Steiner (1987) resume en dos tesis su postura respecto a la epistemología que debe regir la educación matemática. Según estas tesis epistemológicas, la filosofía de la matemática se proyecta en una forma de concebir la enseñanza, y a la vez, la forma de concebir la enseñanza lleva implícita una visión epistemológica particular y filosófica de la matemática.

Tesis 1: De manera general, toda concepción, toda epistemología, toda metodología y filosofía de la matemática contiene a menudo de una manera implícita ideas, orientaciones de teorías de la enseñanza y aprendizaje de la matemática"

Tesis 2: La forma de concebir la enseñanza y el aprendizaje de la matemática más específicamente: los fines y objetivos (taxonomías), los programas, libros de texto, currícula, metodologías de enseñanza, principios didácticos, teorías de aprendizaje, diseños de investigación en educación matemática (modelos, paradigmas, teorías, etc.), e igualmente las concepciones de los profesores sobre la matemática y la enseñanza de la matemática, así como las percepciones de los estudiantes sobre la matemática llevan con ellos una visión particular epistemológica y filosófica de la matemática, aunque sea de manera implícita.

1.8. La formación docente en la actualidad

Seguramente, si realizásemos una encuesta preguntando cuál es la principal cualidad que debe tener un estudiante de matemático, sería: la capacidad para el cálculo, y ganaría por mayoría. Probablemente esto sea debido al enfoque tradicional a la asignatura de matemática, que transmitía el mensaje de que el buen docente de matemática era el buen calculador, cuando esto no tiene porqué ser así.

Al contrario de lo que pueda parecer, la facilidad para el cálculo no es el requisito más importante para afrontar con posibilidades de éxito la carrera de Matemática. Evidentemente, si uno tiene cualidades excepcionales para calcular tiene bastante oportunidad para ser un buen matemático, pero también se ha dado casos de las personas con estas cualidades que no comprendían por qué es necesario demostrar una afirmación, y matemáticos que se equivocan al dividir por tres cifras pero que son capaces de construir complejos modelos teóricos con facilidad.

En mi opinión, para afrontar la carrera de Matemática lo más importante es la capacidad de abstracción, de razonamiento lógico y las ganas de trabajar, y por tanto hay que desterrar la idea de que es necesario ser un tanto mecanismo para ser matemático. Está claro que los matemáticos de élite que se dedican a investigaciones de alto nivel son personas con capacidades excepcionales, pero eso no significa que un estudiante con capacidades más modestas no pueda interesarse en la matemática, porque igual de brillante hay que ser para dirigir una asignatura y no por eso mucha gente deja de estudiar Física.

Lo que quizá sí diferencia la matemática de otras carreras es que el alumno debe ser capaz de pensar a la manera un tanto peculiar de los matemáticos, ya que donde un físico ve una prueba razonable de que algo funciona, un matemático puede ver un argumento que no soportaría un problema lo suficientemente riguroso. Pero eso es algo que se aprende durante el transcurso de la propia carrera y que no requiere más que un poco de práctica y costumbre, por lo que entiendo que no debe ser una razón para descartarla.

En definitiva, yo resumiría las cualidades necesarias para ser matemático son estas dos: tener mucha imaginación y tener aún más capacidad de trabajo. Porque eso sí, la carrera de Matemática no es la más difícil del mercado, pero sí me atrevería a afirmar que está entre las que mayor sacrificio necesita, pues sin un trabajo continuo y diario es imposible obtener buenos resultados.

La investigación en formación de profesores de matemática parte, en la actualidad, de una consideración epistemológica de la matemática que se incluye en el constructivismo (Ponte, 1994a y b). Esta postura no es independiente de la concepción constructivista del aprendizaje (von Glasersfeld, 1989; Vergnaud, 1990; Ernest, 1994; Lerman, 1994a), según la cual el propio alumno construye el conocimiento, a partir de sus estructuras cognitivas anteriores.

CAPÍTULO II

LA MATEMÁTICA Y LAS CREENCIAS SOBRE LA E- A DE ESTUDIANTES DE MATEMÁTICA

II. LA MATEMÁTICA Y LAS CREENCIAS SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE ESTUDIANTES DE MATEMÁTICA

Con objeto de clarificar y no confundir los sujetos a que nos referimos, vamos a emplear los siguientes términos: Hablaremos de estudiantes para referirnos a estudiantes para profesor, o profesores en formación, inscritos en cursos de formación de profesores. Llamaremos alumnos a los adolescentes que se encuentran cursando la enseñanza primaria o secundaria, futuros y presentes estudiantes para profesor. Llamaremos profesores a los sujetos que tienen a su cargo la enseñanza de un curso, o a los estudiantes cuando, durante las prácticas, tienen un curso a su cargo.

2.1. Importancia de las creencias y concepciones de los profesores en la formación de profesores de matemática

Fruto del auge de las psicologías constructivistas (Vergnaud, 1990) y de la tendencia a la democratización educativa, están surgiendo cambios curriculares importantes en la enseñanza (Román y Diez, 1989). La enseñanza de la matemática no es ajena a estas reformas. La edición del Informe Cockcroft (1985) en Gran Bretaña, y la posterior publicación de los estándares profesionales, en los Estados Unidos (1991), ha supuesto el comienzo de la actual reforma en educación matemática.

La formación de profesores de matemática afronta el reto de preparar al profesor para estas reformas. Ello hace que la formación de profesores esté cobrando auge en los congresos y en la literatura referida a educación matemática. En la formación inicial y permanente del profesor, se han proyectado los paradigmas que interpretan la enseñanza y el aprendizaje. En la actualidad se extiende la idea de que interesa más lo que piensa el profesor que trasmitirle destrezas estandarizadas. Esto lleva a dirigir la investigación sobre la formación de profesores de matemática hacia paradigmas interpretativos, en los que interesa el pensamiento del profesor, como variable que controla su acción.

Tanto la formación de profesores como la investigación educativa sobre profesores situada en estos paradigmas, están tomando en consideración el pensamiento de los profesores y de los estudiantes para profesor, preocupándose tanto por lo que piensan sobre la enseñanza como por la forma en que se representan la formación en que están inmersos, en un proceso que llega a ser recursivo. Las representaciones del profesor en formación constituyen a la vez referentes teóricos de su actuación como profesor y componentes prácticos de su actuación como alumno en los cursos de formación. Para delimitar de manera más precisa la importancia de las representaciones de los profesores en formación sobre su actuación como profesores, vamos delimitar el paradigma de investigación y de formación de profesores.

2.1.1. Las creencias y concepciones de los profesores.

Si se tiene en cuenta el paradigma basado en el pensamiento del profesor (Shavelson y Stern, 1983; Clark y Peterson, 1986; Shulman, 1986; Marcelo, 1987), enfatizan dos características del proceso docente: la importancia en la enseñanza de las representaciones del profesor (componente teórica) y la repercusión de la actuación del alumno (componente práctica), por un lado, y la relación de interdependencia de ambos aspectos (Clark y Peterson, 1986).

Desde este paradigma basado en el pensamiento del profesor, se considera, pues, que la conducta cognitiva del profesor está guiada por el sistema personal de creencias y valores, que le confieren sentido a dicha conducta. Por su carácter inconsciente e impreciso, Clark y Peterson (1986), entre otros, dicen que hay que ayudar al docente a describir explícitamente el marco de referencia constituido por sus concepciones y creencias sobre la enseñanza y aprendizaje. Thompson (1992) y Ernest (1989a) destacan la importancia que tienen además las creencias sobre la matemática para los profesores de matemática, y junto con Cooney y Shealy (1994) y Ponte (1992), indican que la formación de profesores debe tomar en consideración la explicitación y cambio de concepciones de los estudiantes para profesor de matemática.

Los futuros profesores no tienen un referente práctico con que confrontar sus creencias sobre la enseñanza de la matemática (Cooney y Shealy, 1994), por lo que no necesitan explicitar y reflexionar sobre esas creencias hasta que no perciban la aparición de dilemas profesionales que deben explicar y resolver. Sin embargo, consideramos que la formación de profesores puede actuar como agente externo que haga que el futuro profesor reflexione sobre su rol como alumno y que tendrá como profesor, sobre el significado de la enseñanza que recibe y que impartirá, y sobre la naturaleza del contenido matemático que está aprendiendo y que enseñará en un futuro (Ernest, 1989a, Thompson, 1992). Las creencias y concepciones de los profesores se constituyen, pues, en aspectos centrales de la formación de profesores.

Es decir, partimos de una interpretación contextual de la formación de profesores, desde una postura epistemológica constructivista, con lo que adoptamos una perspectiva situacional, según la terminología de Ferry (1987). En relación a la formación de profesores, nos situaremos en el cuadrante (problemático, reflexivo) de Zeichner (1983), quien clasifica los paradigmas de formación del profesorado en relación a un sistema de ejes que encierran dos continuos: grado en que la formación del profesorado entiende los contextos sociales e institucionales como ciertos o válidos, o como problemáticos o discutibles, por un lado, y grado en que el curriculum de formación del profesorado es o no establecido de antemano, por el otro.

En esta situación y desde el paradigma del pensamiento del profesor, consideramos muy importantes las teorías y creencias de los docentes, porque forman parte de los procesos de pensamiento de los mismos. Este paradigma se completa con la metáfora del profesor como investigador (Stenhouse 1987; Elliot 1991) y las aportaciones de Schön (1992 y 1993) sobre el profesor como profesional reflexivo.

2.2. Algunas investigaciones sobre formación de profesores de matemática

Los resúmenes de investigaciones que han aparecido durante los últimos años (Cooney, 1984; Houston, 1990; Grouws, 1992; Bazzini, 1994) nos muestran la evolución que ha sufrido la investigación en el campo de la formación de profesores. En estos documentos podemos apreciar un paralelismo entre los paradigmas empleados para investigar la enseñanza y los utilizados en las investigaciones referidas a formación de profesores de matemática (Brown y cols., 1990). Este paralelismo se manifiesta en los siguientes hechos: a) El aumento en el número de investigaciones referidas al campo de la formación de profesores de matemática; b) La creciente importancia que ha tomado el paradigma cualitativo en investigación en formación de profesores de matemática; c) El interés en investigar la formación de profesores de enseñanza secundaria; d) La preocupación por investigar la formación de profesores en el contexto que se realiza, mediante investigaciones de carácter etnográfico; e) El empleo de los procesos de pensamiento, representación, asignación de significados, creencias y concepciones, etc. de los profesores en formación, como variables en las investigaciones dedicadas a formación de profesores; f) La repercusión sobre la enseñanza y sobre la formación de profesores tienen las epistemologías que conciben el conocimiento matemático como un proceso (Dossey, 1994), más que como un producto; g) La implicación del proceso de investigar la formación de profesores con los propios cursos de formación de profesores. Esta incidencia se manifiesta en la metáfora del profesor investigador (Stenhouse, 1987), que lleva a incluir la investigación dentro del proceso de formación. Pero además, el objetivo de la investigación en formación de profesores es la elaboración de currícula de formación. Y, por último, se constata que los investigadores en formación de profesores son fundamentalmente formadores de profesores implicados en cursos de formación (Brown y cols. 1990)

El periodo de desarrollo profesional como docente, durante 30 años aproximadamente, partió desde que los problemas de la formación de profesores consistían primordialmente en poner al día el conocimiento matemático de los profesores. Los progresos en formación de profesores se contemplaban como una cuestión de trasladar la investigación en enseñanza a los principios para orientar a los profesores. Esta investigación en enseñanza se focalizaba en las conexiones entre los logros de los estudiantes y las características de los profesores, los comportamientos de los profesores y las decisiones de los mismos.

Brown y Borko (1992), en el Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, (Grouws, 1992) diferencian tres tradiciones investigadoras en formación de profesores. Una primera, en el campo de la psicología cognitiva, se basa en aprender a enseñar, para lo que trata de identificar una buena enseñanza de la matemática, y plantea la preparación del profesor en un proceso a largo plazo, que comienza en su experiencia discente. En esta corriente surgen, entre otras, las investigaciones centradas en el profesor eficaz, y en la comparación profesor experto / profesor novato. Una segunda línea de investigación se refiere a la socialización del profesor, en la que se examina el proceso de entrada del futuro profesor en la sociedad de profesores de matemática. Y una tercera que se ocupa del desarrollo del profesor, entendido como crecimiento profesional de los profesores.

Zeichner y Gore (1990) distinguen tres líneas de investigación, dentro de la segunda línea de investigación descrita por Brown y Borko (1992): la primera se sitúa en una perspectiva funcionalista (partiendo de vías predictivas y generalizables, el profesor es pasivo); la segunda es la perspectiva interpretativa; y la tercera la perspectiva crítica (en relación con el contexto social). La perspectiva interpretativa se ocupa de la forma en que el profesor en formación interpreta el proceso formativo. En esta línea se inscriben las investigaciones relacionadas con las creencias y concepciones de los profesores.

Por su relación con la investigación interpretativa, destacamos de la tercera línea de investigación analizada por Brown y Borko (1992) las investigaciones que emplean el esquema de Perry (Copes, 1982; Perry, 1988) para describir las etapas evolutivas del desarrollo del profesor en su carrera profesional (Mayerson, 1977; McGalliard, 1983)

Como vemos, en la investigación en formación de profesores de matemática, va aumentando el interés por las creencias y concepciones de los profesores. Este interés hace que en el Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (Grouws, 1992) aparezca un artículo dedicado específicamente a las Creencias y concepciones de los profesores (Thompson, 1992). Independientemente de que este artículo nos suministre un estado de la cuestión que describiremos más adelante, nos interesa destacar aquí el peso que se reconoce al estudio de las creencias y concepciones de los profesores en la investigación sobre formación de profesores, en el que aporta una reflexión sobre la importancia de los paradigmas basados en el pensamiento del profesor. Y aunque no dé resultados definitivos, las investigaciones sobre concepciones y creencias del profesor permiten, por una parte, combatir el uso de las concepciones derivadas de experiencias discentes, por otra reconocer que muchas de las creencias derivan de la manera en que se realiza la formación, y por último permiten reflexionar sobre el papel de los formadores de profesores.

2.3. Naturaleza de los constructos concepciones y creencias en la matemática

En el apartado anterior hemos descrito la importancia que se le concede en la investigación en formación de profesores de matemática a las concepciones y creencias de los estudiantes para profesor, sobre el conocimiento matemático y sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

Antes de plantear el problema específico de investigación vamos a intentar precisar el alcance de las nociones que estudiaremos en nuestra investigación: concepciones y creencias de los estudiantes para profesor.

El Diccionario de la Real Academia (Real Academia Española, 2015) los define:

Creencia: Firme asentimiento y conformidad con alguna cosa. Completo crédito que se presta a un hecho o noticia como seguros o ciertos. Concepción: Acción y efecto de concebir.

Concebir: Formar idea, hacer concepto de una cosa, comprenderla.

En el diccionario etimológico, aparece creencia como "dar fe", mientras que concepción aparece como afirmación racional, de acuerdo con criterios explícitos. En el Diccionario de términos filosóficos de Ferrater Mora (1994) no aparece la palabra concepción, y le da un matiz teológico al término creencias, de manera que cuando discute el significado que atribuyen algunos autores a éste término, indica en todos ellos una raíz religiosa.

Thompson (1992) y Pajares (1992) consideran que no se ha descrito con precisión en la literatura de investigación, el concepto de creencia, y su relación con el conocimiento, pese a la popularidad que esta línea investigadora ha alcanzado recientemente. Pajares achaca a esta falta de precisión la dificultad para comunicar resultados de investigaciones.

2.3.1. Caracterización de creencia.

Vicente (1995), en un estudio sobre el peso y significado de la información que percibimos, recorre sistemáticamente el sentido que se le atribuye al término creencias. Tomando las creencias como hecho humano, la primera distinción que se establece tiene un alcance popular y consiste en diferenciar el conocimiento por sus fuentes: fuentes propias del sujeto y fuentes externas.

Las primeras son la propia experiencia de la vida y también la capacidad intelectual de cada uno; por las que llegamos a obtener determinados conocimientos: esto es lo que propiamente sabemos. A esto se añade lo que conocemos por medio del testimonio o de la información procedente de otras personas; pero que nosotros no hemos podido comprobar o de hecho no hemos comprobado personalmente: esto es lo que, propiamente hablando, creemos (Vicente, 1995)

Para este autor, lo que los psicólogos sociales llaman sistemas de creencias tienen una estructura jerárquica. Las creencias centrales serían las que se refieren a la identidad personal, rodeadas de las concernientes al mundo exterior, desde el más inmediato al más lejano, en las que se incluirían las creencias relacionadas con el ambiente cultural y social. Un nuevo círculo estaría formado por las creencias sobre el pasado, en cuanto determinan e influyen sobre nuestro presente. En el siguiente círculo aparecerían las creencias que se refieren a los ideales humanos y los valores de la vida. Y en el círculo final aparecerían los conocimientos científicos que si bien, como ya hemos anotado, de suyo son algo verificable o comprobable bajo este aspecto pertenecen al saber, de hecho y para la mayoría de las personas y en un elevado porcentaje pertenecen a lo que se acepta credencialmente, es decir, por la confianza en los investigadores, testigos o maestros.

Por encima de este círculo de creencias científicas (que constituyen el objeto de nuestra investigación), se situaría el círculo de conocimientos de los que sí tenemos una evidencia personal.

El uso lingüístico del término creencias se puede reducir a tres significados principales, según Vicente, cada uno de los cuales precisa más el campo de uso.

a) Está en primer lugar el uso en sentido amplio, impreciso, que incluye a cualquier tipo de conocimientos o noticias. En lugar de "yo pienso" decimos frecuentemente "yo creo".

b) Luego vendría un sentido un poco más preciso. Se trataría de un conocimiento del que no tenemos plena evidencia ni certeza; pero que es compatible con un saber probable, basado en algunos indicios o pruebas razonables. En este caso, "creer" equivale a "tener opinión" sobre algo; es decir, poseer un conocimiento basado en algunas pruebas, datos o comprobaciones. Aquí se distingue ya mejor entre "saber" y "creer", como entre conocimiento cierto y conocimiento solamente probable.

c) Finalmente, cabría un significado de "creer" todavía más estricto, como confiar en alguien; prestar nuestro crédito a otras personas "a las que creemos". En este sentido "creer significa asentir, aceptar como verdadero aquello que se nos comunica. De esta forma el "creer" se diferencia netamente del "saber", si por esto entendemos el conocimiento de algo bajo una verificación y comprobación personal. (Vicente, 1995).

Esta caracterización gradual lleva a Vicente a delimitar el sentido de "creencia" al asentimiento o aceptación de una comunicación de otras personas. Esta restricción de creencias a lo que proviene de la comunicación no deja de lado el uso que se hace de creencia en las ciencias, ya que, como dice el autor: de hecho en la mayoría de los casos se trata de creencias en el sentido estricto. Son, en efecto, ideas u opiniones que la gente tiene en su mente, pero sin haber comprobado ni haberse detenido a examinar si se trata de algo fundado o sin fundamento; simplemente se limita a "creerlo" por haberlo recibido de los mayores, del ambiente cultural o social, porque "siempre se ha entendido así" o "todo el mundo lo dice". Como decía Ortega, no son propiamente ideas, sino "algo en lo que se está" y de lo que ni siquiera nos permitimos dudar. (Vicente. 1995)

Ortega y Gasset (1986) añade una caracterización más ontológica de las creencias basada en la relación al sujeto. Para Ortega se tienen ideas, mientras que: esas ideas que son de verdad "creencias" constituyen el continente de nuestra vida. Cabe decir que no son ideas que tenemos, sino ideas que somos.

Marcelo (1987) recoge la definición de creencias de Fishbein y Ajzen (1989) Información que tiene una persona enlazando un objeto con algún atributo esperado; las creencias están normalmente en interrelación con una dimensión de probabilidad subjetiva y conocimiento.

Esta definición vuelve sobre la idea de contraponer creer a conocer por la verificabilidad del conocimiento, prescindiendo de lo que Vicente llama actitud de creencia.

Thompson, en el campo concreto de la investigación en educación matemática (Thompson, 1992) caracteriza de alguna forma las creencias cuando las diferencia de conocimiento: Una característica de las creencias es que pueden ser sostenidas con varios grados de convicción. Otro rasgo distintivo de las creencias es que no son consensuales.

Las creencias, por otra parte, son a menudo mantenidas o justificadas por razones que no cumplen estos criterios, y, por tanto, son caracterizadas por una falta de acuerdo sobre cómo tienen que ser evaluadas o juzgadas.

Thompson destaca también, siguiendo a Green (1971), que las creencias se presentan en grupos, formando sistemas de creencias. Green (1971) distingue tres dimensiones en el sistema de creencias: una relación cuasi-lógica (que diferencia, creencias primarias y creencias derivadas); una dimensión espacial, según la fuerza psicológica con que se mantienen (que diferencia entre creencia central y periférica); y un agrupamiento o aislamiento de los grupos caracterizado por la forma de relación entre agrupamientos. Cada una de estas dimensiones tiene que ver con la forma en que se cree, no con el contenido de las creencias, es decir, Green (1971), siguiendo a Russell (1983), diferencia el contenido de la creencia de la fuerza con que se mantiene esa convicción.

Pajares (1992), tras presentar definiciones o caracterizaciones que algunos autores hacen de creencia, destaca tres componentes de la creencia: un componente cognitivo, que representa conocimiento; un componente afectivo, capaz de provocar emoción; y un componente conductual, activado cuando lo requiere la acción.

Ernest (1989a), habla de creencias, y las sitúa en relación al conocimiento y las actitudes. Llega a establecer un modelo de conocimiento, creencias y actitudes de los profesores (Ernest, 1989b) que describe "la estructura del pensamiento de los profesores".

Ponte (1994b) toma las creencias, en el sentido de proposiciones no demostradas. Distingue tres tipos de conocimiento, científico, actividad profesional, y conocimiento vulgar y establece la repercusión que tiene cada uno sobre las creencias. Posteriormente diferencia entre creencias y conocimiento: Podemos ver las creencias como una parte del conocimiento relativamente "poco elaborado", en vez de verlos (conocimientos y creencias) como dos dominios distintos. En las creencias predominaría la elaboración, más o menos fantástica y no confrontada con la realidad empírica. En el conocimiento más elaborado de naturaleza práctica, predominarían los aspectos experienciales. En el conocimiento de naturaleza teórica predominaría la argumentación racional.

Ponte (1994b) considera que el sistema de creencias no requiere un consensus social relativo a su validez o adecuación. Las creencias personales no requieren, incluso, consistencia interna. Esto implica que las creencias son a menudo discutibles, más inflexibles y menos dinámicas que otros aspectos del conocimiento (Pajares 1992). Las creencias juegan un papel más importante en aquellos dominios del conocimiento en los que la verificación es difícil o imposible. Aunque no podemos vivir y actuar sin creencias, uno de los más importantes fines de la educación es discutir y promover la toma de conciencia de ellas.

Llinares y Sánchez (1987) al caracterizar el desarrollo del conocimiento del profesor, sitúan las creencias como generadoras de conflictos.

De estas primeras definiciones podríamos concluir aceptando que el término creencia se atribuye a una actitud y a un contenido. La actitud se encierra tanto en el grado de probabilidad de certeza como en la predisposición a la acción, lo que le confiere un carácter emotivo, no explícito. El contenido encierra un conocimiento que no necesita formularse en términos de modelos compartidos, y que se caracteriza por no haber sido contrastado. De hecho, en algunos textos aparecen dos acepciones de creencias, el primero con este matiz de convicción con base emocional, y un segundo que hace alusión a la no certeza.

2.3.2. Caracterización de las concepciones y su relación con las creencias.

Para caracterizar la idea de concepción recurrimos a la descripción que realiza Ruiz (1994). Siguiendo a Artigue (1989), El Bouazoui (1988) y Vergnaud (1990), establece dos dimensiones para situar las concepciones. Por una parte se diferencian las concepciones subjetivas o cognitivas de las epistemológicas, y por otra las concepciones locales de las globales. Las concepciones subjetivas se refieren al conocimiento y creencias de los sujetos. Las concepciones epistemológicas se refieren a tipologías de conocimiento existente en un cierto período histórico, o circunscrito a los textos o programas de cierto nivel de enseñanza.

"Las concepciones globales describen holísticamente las concepciones ligadas a un concepto u otro objeto, y las locales tienen en cuenta aspectos parciales de los sistemas anteriores". (Ruiz, 1994).

Las concepciones subjetivas son mantenidas por cada sujeto, de manera individual. En nuestra investigación, estas concepciones serán las que mantengan los estudiantes para profesor. El campo de problemas a que se refieren puede ser el ámbito matemático (concepciones sobre la matemática), la forma de enseñar o aprender (concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje), situaciones de la vida cotidiana (concepciones sobre la utilidad de la matemática), o su propia formación como profesores (concepciones sobre el conocimiento didáctico, y sobre la didáctica de la matemática). Las concepciones epistemológicas se sostienen por la comunidad matemática a lo largo de la historia, y se refieren a los problemas que se plantea la propia comunidad dentro del ámbito de la disciplina (concepciones sobre la matemática), a la forma en que se accede a este conocimiento (concepciones gnoseológicas sobre el conocimiento matemático), o a problemas de otras disciplinas que son susceptibles de resolución mediante los conocimientos matemáticos (concepciones sobre la utilidad de la matemática).

Tras hacer un recorrido por diversos autores y posturas, Ruiz operativiza el término concepciones a partir de la caracterización que Vergnaud (1990) hace de la idea de concepto, interpretada desde la teoría del objeto y sus significados de Godino y Batanero (1995 y 1994). Con ello, la concepción se caracteriza por:

- ✓ Los invariantes que el sujeto reconoce como notas esenciales que determinan el objeto
- ✓ El conjunto de representaciones simbólicas que le asocia y utiliza para resolver las situaciones y problemas ligados al concepto;
- ✓ El conjunto de situaciones, problemas, etc. que el sujeto asocia al objeto, es decir para las cuales encuentra apropiado su uso como herramienta (Ruiz, 1994).

Indica Ruiz que los autores consultados reconocen que antes de la instrucción, existen en el sujeto, concepciones sobre el objeto. También reconocen los autores el carácter resistente y la relación con las situaciones que le dan sentido al objeto. Entre los tipos de concepciones, Ruiz distingue concepciones espontáneas y concepciones inducidas, accidentales o provisionalmente estables, y relaciona el término concepciones con la idea de obstáculo (Brousseau, 1983).

En la literatura que hemos consultado, la diferenciación entre concepción y creencia no es siempre clara. Pajares (1992) caracteriza las creencias distinguiéndolas de una manera muy sutil de las concepciones. Thompson (1992), diferencia en principio explícitamente concepciones, compuestas de creencias y otras representaciones:

Además de la noción de sistema de creencias, este capítulo se referirá a las "concepciones" de los profesores, vistas como una estructura más general, incluyendo creencias, significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales, preferencias y similares. Aunque puede que la distinción no tenga una gran importancia, en ocasiones será más natural referirse a las concepciones de los profesores sobre la matemática como disciplina, que hablar simplemente de las creencias de los profesores sobre la matemática.

Una concepción del profesor sobre la naturaleza de la matemática puede verse como creencia, concepto, significado, regla, imagen mental y preferencia, consciente o inconsciente del profesor en relación a la matemática. Estas creencias, conceptos, puntos de vista y preferencias, constituyen los rudimentos de una filosofía de la matemática. (Thompson, 1992).

Sin embargo, al tratar las investigaciones, Thompson (1992) emplea indistintamente el término creencias (beliefs) y el término concepciones (conceptions). Aunque aparece con más frecuencia la palabra creencias que la palabra concepciones, cuando se refiere a las investigaciones emplea los dos términos: concepciones y creencias de los profesores sobre la matemática. Su intento de hacer una consideración diferenciada se rompe además al aparecer los términos concepciones y creencias como sinónimos cuando presenta las investigaciones realizadas en este campo. Por ejemplo, habla Thompson (1992) de que las investigaciones de Ernest (1989) se refieren a concepciones, pero al trascribir el texto de éste autor no aparece el término concepciones, sino que se citan como puntos de vista sobre la matemática. Igualmente, las investigaciones de Lerman (1983) son presentadas como concepciones, aunque en la descripción de categorías se hable de creencias.

También Dossey (1992), que habla sólo de concepciones, cita las investigaciones del grupo de Cooney en Georgia, y las investigaciones de este autor se refieren siempre, a creencias (beliefs).

Llinares (1991c) reconoce que entre conocimiento, creencias y concepciones existen diferencias sutiles. Las creencias son como el "contexto psicológico" en el que se produce el aprendizaje en los cursos de formación; las concepciones constituyen sistemas cognitivos interrelacionados de creencias y conocimientos que influyen en lo que se percibe y en los procesos de razonamiento que se realizan.

Ponte (1992) hace una distinción específica entre creencias y concepciones más próxima a la postura de Ortega y Gasset (1986). Esta diferenciación se ve refrendada en el artículo de Guimaraes (1992), quien indica que el término concepciones aparece en la literatura inglesa de investigación menos frecuentemente que el término creencias.

Ponte (1992) indica que las creencias y concepciones tienen una función cognitiva; aunque las creencias (de carácter no racional) constituyen una base en que se apoya el conocimiento. Para este autor las concepciones son organizadoras de nuestro conocimiento, formando un "substrato conceptual" anterior a los conceptos. Funcionan como filtros, es decir, son simultáneamente condición y límite de nuestro conocimiento de la realidad. Pero además permiten interpretar esta realidad a la vez que son elementos bloqueadores de esta interpretación, luego distorsionan lo que se nos presenta.

Más recientemente, Ponte (1994b) caracteriza las concepciones de manera más precisa: Las concepciones pueden ser vistas en este contexto como el plano de fondo organizador de los conceptos. Ellas constituyen como "miniteorias", o sea cuadros conceptuales que desempeñan un papel semejante a los presupuestos teóricos de los científicos. Las concepciones condicionan la forma de abordar las tareas. Estrechamente ligadas a las concepciones están las actitudes, las expectativas y el entendimiento que cada uno tiene de lo que constituye su papel en una situación dada" (Ponte 1994).

Empleo conocimiento para referirme a un gran campo de conceptos, imágenes y habilidades inteligentes poseídas por los seres humanos. Creencias son las "verdades" personales indiscutibles llevadas por cada uno, derivadas de la experiencia o de la fantasía, teniendo una fuerte componente evaluativa y afectiva (Pajares 1992). Concepciones son los marcos organizadores implícitos de conceptos, con una naturaleza esencialmente cognitiva. Ambos, creencias y concepciones forman parte del conocimiento.

Las concepciones, como marcos organizativos implícitos condicionan la forma en que afrontamos las tareas, frecuentemente por vías que otros encuentran menos apropiadas. El interés del estudio de las concepciones se encuentra en la aceptación de que, como un substrato conceptual, ellas juegan un papel esencial en el pensamiento y la acción. En vez de referirse a conceptos específicos, constituyen una forma de ver el mundo y organizar el pensamiento. Sin embargo, no pueden ser reducidas a los aspectos más inmediatamente observables de conducta y no se revelan fácilmente a sí mismos - tanto a los otros como a nosotros mismos. (Ponte, 1994)

Artigues (1989) alude a la diferenciación entre concepciones globales y locales. Otros investigadores franceses dan un aspecto más conceptual al término concepción. Así, El Bouazzoui (1988), tras recoger definiciones de Brousseau y Balacheff, da dos características de las concepciones: son psicológicas, es decir ocurren "en la cabeza" del individuo, sólo existen concepciones individuales; y se diferencian según el sujeto que se considere en la situación didáctica (alumnos, profesores, instrumentos y evolución del saber). Sin embargo, en su tesis, El Bouazzoui (1988) describe las concepciones sobre la continuidad, de manera que se aproxima a los conceptos de continuidad, empleando el sentido de concepciones objetivas de Ruiz (1994).

Sfard (1991) delimita la idea de concepción indicando que cada vez que una idea matemática es considerada en su forma "oficial", hablamos de concepto - como un constructo teórico dentro del "universo formal del conocimiento ideal" -. La Concepción es el racimo (cluster) completo de representaciones internas y asociaciones evocadas por el concepto - el compañero del concepto en el "universo del conocimiento humano" subjetivo e interno.

2.3.3. Delimitación de los constructos concepciones y creencias en nuestra investigación.

La presente investigación se sitúa en un contexto preciso: licenciatura de matemática, formación de profesores de matemática de secundaria. Según la primera coordenada, el contacto de los estudiantes con el conocimiento matemático es como alumnos, no como investigadores. Según la segunda coordenada (formación inicial de profesores), el contacto de los estudiantes con la enseñanza es discente, no docente. En esta situación, los estudiantes carecen de referentes que le permitan contrastar sus representaciones sobre el conocimiento matemático y sobre la enseñanza de la matemática. Esto hace que estas representaciones pertenezcan al terreno de las creencias de los estudiantes para profesor.

El objetivo de la formación de profesores es la creación de una actitud reflexiva sobre su práctica profesional (Smyth, 1991), pero sin necesidad de esperar a que existan referentes de los que pueda emerger el conocimiento, que en este caso y sin el hábito de reflexionar sobre la práctica, podría limitarse a un conocimiento rutinario para resolver dilemas puntuales. Luego los cursos de formación tienen que afrontar las creencias de los estudiantes para profesor, tratando de explicitarlas y de confrontarlas con sus fundamentos. Esto hace que nuestra investigación considere las creencias como un constructo prioritario de atención.

Vamos a orientar nuestra investigación a creencias y concepciones. Hablaremos de creencias porque nos interesa los aspectos emotivos, implícitos, de las representaciones de los estudiantes. Pero también hablaremos de concepciones para tomar en consideración el aspecto cognitivo, conceptual, consciente, que organiza el pensamiento. Nuestro constructo se referirá, pues, tanto al aspecto emotivo como conceptual, tanto al sujeto particular (estudiante para profesor), como a la institución (en matemática). Tanto a los problemas escolares, como a los cotidianos. Tanto a las situaciones ligadas al contenido a enseñar/aprender, como a los problemas ligados a la enseñanza y el aprendizaje.

Utilizaremos, pues los constructos concepciones y creencias, en el sentido que en la teoría de Godino y Batanero (1994) se llamaría significados que atribuyen los estudiantes para profesor a la propia matemática, y a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, consideradas como objetos, esto es, entidades emergentes de ciertos sistemas de prácticas.

CAPÍTULO III

FORMAS DE CONCEBIR EL CONOCIMIENTO, E - A DE LA MATEMÁTICA

III. FORMAS DE CONCEBIR EL CONOCIMIENTO, LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA.

3.1. La epistemología de la matemática

Las posturas más significativas en la enseñanza de la matemática. Para ello vamos a emplear varios textos principales, que se completarán con otros que tratan alguna cuestión en particular.

Como cabría esperar todos estos textos parten de una forma particular de concebir el conocimiento matemático y la enseñanza y aprendizaje. Pero el fin pretendido en cada uno es diferente. Mientras algunos tratan de presentar un recorrido más amplio por las diferentes posturas epistemológicas, otros se orientan a defender posiciones concretas. El texto de Cañón (1993), por ejemplo, se plantea si el conocimiento matemático se descubre o se inventa, y para contestar esta pregunta realiza un recorrido por las posturas más importantes, a lo largo de la historia de la matemática para concluir con una posición precisa de la autora. También los textos de Kline (1985), Davis y Hersh (1989) y Dou (1970) se plantean preguntas cruciales de la epistemología de la matemática y desarrollan las respuestas dadas por diferentes escuelas. Sin embargo, tal como reconoce el autor, el libro de Tymoczko (1986) se destina a defender una postura falibilista de la filosofía de la matemática, y los autores que en él aparecen describen aspectos de esta postura (Lakatos, 1986; Hersh, 1986). Otro texto similar es el de Ernest (1991), en el que el autor defiende el constructivismo social, tras hacer una presentación de las cuestiones que le separan de otras posturas epistemológicas.

Para estudiar la filosofía de la educación matemática, Ernest (1991), establece dos niveles de análisis; el primero es de carácter epistemológico, filosófico y moral, desembocando en la descripción del constructivismo social, como modelo epistemológico de filosofía de la matemática, con repercusión en la educación matemática; el segundo análisis se refiere específicamente a la educación matemática, y en él llega a establecer los fines de la educación matemática y demanda teorías concernientes al aprendizaje y enseñanza de la matemática más acordes con la visión constructivista social. En otro análisis, Ernest (1994) articula el conocimiento individual con el conocimiento social, por lo que son de capital importancia la actitud, creencias y conocimientos de los individuos sobre la matemática. Estos aspectos se organizan en un modelo (Ernest, 1989b) que sintetiza el peso relativo de cada componente en el conocimiento individual.

El libro de Tymoczko (1986) presenta aportaciones generales, pero sobre todo, caracterizaciones del constructivismo matemático, en los artículos de Hersh, Lakatos y el mismo. El autor reconoce que el texto proviene de la frustración que un grupo de interesados en filosofía de la matemática ha sentido ante la dificultad de explicar las prácticas de matemática por medio de las filosofías tradicionales en matemática. El libro está dividido en dos secciones; en la primera se recogen algunas de las críticas más agudas y estimulantes al fundacionalismo; la segunda explora las respuestas a la pregunta ¿En qué nueva dirección debe dirigirse la filosofía de la matemática al abandonar las búsquedas fundacionales?, para lo que examina las prácticas reales de los matemáticos y de quienes las usan.

Pero más que caracterizar cada corriente, nuestro interés es destacar las cuestiones más importantes que se plantea la epistemología de la matemática. Hemos encontrado una síntesis muy fundamentada en el texto de Cañón (1993). En este libro la autora hace un recorrido por la consideración histórica de la naturaleza de la matemática, deteniéndose en criterios que han marcado las diferentes posturas. Para discutir sobre la gnoseología del conocimiento matemático (Matemática ¿creación o descubrimiento?), establece tres niveles de análisis: ontológico, cognoscitivo y lingüístico-formal y cruza estos tres criterios con aspectos referentes a: historicidad o a-historicidad del conocimiento matemático, verdad-certeza (como coherencia, correspondencia y pragmática), y el propio origen del conocimiento. La autora concluye este análisis indicando que "Los tres niveles de análisis muestran cómo la verdad evoluciona, desde una basada en la teoría de la correspondencia (ontológica) a una basada en la coherencia (lenguaje formal) al tercer nivel, pasando por una basada en la utilidad pragmática (nivel cognoscitivo)".

Cañón no se limita a presentar su análisis, sino que toma posición, expresando sus concepciones sobre el conocimiento matemático. Para ello plantea una caracterización del conocimiento matemático basada en diez puntos. Para cada punto, la autora traza un eje que viene definido por posturas extremas. En un extremo aparece lo que la autora llama postura historicista y en otro la postura a-historicista. Incluiremos estos puntos en el lugar del esquema que corresponda.

Para sistematizar la información vamos a utilizar en este apartado el esquema que presenta Vergnaud (1990), en el que las preguntas epistemológicas, referentes a las representaciones sobre la matemática y su enseñanza, se plantean en dos planos diferentes: la epistemología de la matemática, y la visión epistemológica de la educación (de la psicología para Vergnaud). Esta última se concretará en una visión epistemológica de la educación matemática.

El texto de Ernest (1991) también nos permite situar las distintas posturas en cada uno de los apartados que vamos a destacar en este recorrido sintético. Ahora bien, como el fin de Ernest es presentar Un modelo de ideología educativa para la matemática, esta autor recurre a los siguientes elementos de su modelo de ideología educativa:

Elementos primarios (Epistemología, Filosofía de la matemática, Conjunto de valores morales, Teoría sobre el niño, Teoría de la sociedad, Fines de la educación,

Elementos secundarios (Fines de la educación matemática, Teoría del conocimiento matemático escolar, Teoría del aprendizaje matemático, Teoría de la enseñanza de la matemática, Teoría de la evaluación del aprendizaje matemático, Teoría de recursos para la educación matemática, Teoría de habilidades matemáticas, Teoría de la diversidad social en educación matemática) (Ernest, 1991).

Caracterizar las creencias y concepciones que tienen los futuros profesores de matemática sobre el conocimiento matemático, y sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Para ello nos interesa hacer una descripción, aunque sea somera, de las grandes corrientes de pensamiento en aquellos elementos del modelo de Ernest que se relacionan más directamente con la naturaleza del conocimiento matemático y con la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Por ello, y sin quitar valor a los otros elementos del modelo, nos ocuparemos especialmente de los elementos primarios relacionados con la filosofía de la matemática (entendida como epistemología y ontología), y con los fines de la educación. Igualmente nos interesa hacer el inventario de posturas ante las grandes preguntas que se suscitan en relación a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

3.1.1. El conocimiento matemático.

La epistemología de la matemática, dice Vergnaud, se pregunta ¿Qué tipo de objeto es la matemática?, ¿Qué clases de objetos matemáticos existen?, ¿Qué relación existe entre la matemática y otras ciencias?

Ernest (1991) plantea los siguientes criterios para diferenciar posturas epistemológicas:

a) La consideración del conocimiento: naturaleza, justificación y génesis del conocimiento matemático;

b) Las características de los objetos: naturaleza y origen de los objetos matemáticos;

c) El significado de las aplicaciones: eficacia de la matemática en la ciencia, en la tecnología, etc.;

d) Las características de la práctica: características y tipos de actividades de la matemática.

Con objeto de sistematizar el estudio vamos a considerar siguiendo, a Ernest (1994), dos apartados dentro de la epistemología de la matemática: la ontología de la matemática (que nos aproxime al estudio de la naturaleza del objeto matemático) y la gnoseología (que se ocupe de la actividad matemática, de la acción sobre los objetos).

El estudio ontológico nos permitirá discutir sobre la dialéctica descubrimiento / creación, la consideración matemática producto / matemática proceso, la relación entre el sujeto y el objeto de conocimiento, la relación entre el conocimiento individual y el conocimiento colectivo, la relación entre el conocimiento matemático y la naturaleza material, el valor de verdad de los conocimientos matemáticos y la utilidad y/o belleza de la matemática.

El estudio gnoseológico contempla la discusión de la forma de acceso al conocimiento: por los sentidos / por la razón; como consecuencia vuelve sobre la dialéctica descubrimiento / creación y de las relaciones de la matemática con la lógica. Con ello nos introducimos en los métodos de hacer matemática: deducción / intuición, o razonamiento demostrativo / razonamiento plausible, y en formas de avance en las ciencias: modelos globales / de etapas; incidimos también en el valor de verdad: absolutismo / falibilismo; relación entre el conocimiento matemático y la historia; y mediante el análisis del lenguaje de la matemática, abstracto / no único, entramos en el análisis gnoseológico de la forma del conocimiento: resultados generales / resultados particulares y volvemos a la reflexión sobre la forma de acceso y validación del conocimiento: realista / constructivista, y a analizar diversas posturas constructivistas.

3.1.1.1. Ontología del conocimiento matemático.

Desde el punto de vista ontológico, las preguntas que se suscitan son, entre otras: ¿Qué son los objetos matemáticos? ¿Qué existencia tienen los objetos matemáticos? ¿Qué relación tienen los objetos matemáticos con la naturaleza?

a) Naturaleza del conocimiento matemático:

Kline (1985) esquematiza las respuestas a las preguntas que se refieren a la naturaleza del conocimiento matemático estableciendo dos posturas extremas:

1) La matemática constituyen un cuerpo único de conocimientos, correcto y eterno, independientemente de que se puedan aplicar al mundo físico. Las verdades matemáticas son, entonces, descubiertas, no inventadas. El hombre al descubrirlas no desarrolla la matemática sino el conocimiento que tiene de ellas. Este corpus matemático está situado, para Hermite, Hardy, Hadamard, Gödel, etc, en un mundo fuera del hombre, mientras que otros matemáticos (Hamilton, Cayley, etc) lo consideran incrustado en la razón humana (racionalismo metafísico, tal como lo define Ferrater, 1994, es decir, considerando que la realidad es en último término de carácter racional, oponiéndose al realismo).

2) La matemática es por entero un producto del pensamiento humano. Kline sitúa a Aristóteles como iniciador de esta postura, seguida, más adelante por las corrientes intuicionistas y formalistas. La veracidad de los asertos matemáticos, al no existir un corpus externo de referencia, debe estar en la razón (según Ferrater, 1994, el racionalismo epistemológico o gnoseológico argumenta que el único órgano adecuado o completo de conocimiento es la razón, luego todo conocimiento verdadero tiene origen racional, con lo que se opone al empirismo y, en cierto sentido, al intuicionismo). Kline diferencia dos posturas en esta corriente: "mientras que algunos afirman que la verdad está garantizada por la mente, otros mantienen que la matemática es una creación de mentes humanas falibles, más que un cuerpo fijo de conocimientos".

Tymoczko (1986) identifica esta postura platónica con la realista, y la postura contraria con la constructivista. Pero como la oposición entre estas dos posturas se refiere a la forma de acceso al conocimiento, las trataremos más detenidamente en el análisis gnoseológico.

Davis y Hersh (1989/1982), partiendo del continuo platonismo - formalismo, añaden una nueva dimensión a esa supuesta ordenación ontológica unidimensional. Según su interpretación, los formalistas consideran que no hay objetos matemáticos, sino que la matemática son un conjunto de fórmulas de valor sintáctico. Consideran pues que platonismo y formalismo son opuestos en existencia y realidad de los objetos matemáticos, coincidiendo en los principios de razonamiento autorizados en la práctica de la matemática (en oposición al constructivismo, como veremos en el apartado dedicado a la gnoseología)

Cañón (1993) recoge esta multidimensionalidad para describir su postura en el conflicto descubrimiento/creación. Para esta autora el conocimiento es simultáneamente descubrimiento y creación; es creación ya que los conceptos sólo existen cuando se formulan; es descubrimiento en base a que esa creación no puede ser arbitraria, sino que obedece a una cierta necesidad que está en función del grado de desarrollo adquirido hasta el momento en que se produce.

Dossey (1992) realiza una separación más radical en las concepciones sobre la matemática, considerando que desde la matemática griega a la actualidad la matemática han constituido un producto, pero está surgiendo una nueva filosofía de la matemática que considera la matemática como práctica. Para Dossey la dicotomía conceptual de base en el periodo de la matemática como producto, está centrada en la distinción epistemológica protagonizada por Platón y Aristóteles; el platonismo considera los objetos matemáticos en un cuerpo externo, mientras que Aristóteles considera la matemática como una idealización que resulta de experiencias con objetos. La consideración de la matemática como práctica sigue la idea de Hersh (1986), según la cual la nueva matemática se caracteriza por considerar que los objetos matemáticos son inventados, creados a partir de actividades con los objetos matemáticos que han surgido de las necesidades de la ciencia y de la vida. Estos conocimientos tienen propiedades bien determinadas, pero que no están implícitos en la definición que se ha hecho de ellos.

La teoría del significado institucional de los objetos matemáticos, que parte de una "ontología de los objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspectos de la matemática como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado" lleva a Godino y Batanero (1994) a considerar el objeto matemático como emergente de la acción del hombre ante un campo de problemas. De esta forma, los autores no se contentan con identificar la matemática con la práctica, sino que contextualizan esta práctica en una institución y en un momento histórico.

Con esta diferenciación entre matemática producto / matemática proceso nos introducimos en otras cuestiones relativas a la ontología del conocimiento matemático.

b) La verdad del conocimiento matemático:

Copes (1979, 1982) pone en paralelo los niveles de desarrollo del conocimiento de Perry (c) (absolutismo, multiplicismo, relativismo, dinamismo, personalismo) con la forma en que es concebido el conocimiento matemático a través de la historia. El absolutismo empieza en los Babilónicos y Egipcios, para los que la matemática eran un montón de hechos relacionados con el mundo real. Se mantiene con los griegos, aunque en Grecia se empieza a cuestionar la correspondencia entre la matemática y el mundo real, pero se sigue considerando que los resultados matemáticos son absolutamente verdaderas. Hasta que no se discute el quinto postulado de Euclides, en el siglo XIX, en el conocimiento occidental domina una concepción absoluta del conocimiento matemático. Con la aparición de las geometrías no euclidianas y los intentos de formalización se asienta una concepción relativista. Las posturas falibilistas dan lugar a posiciones de compromiso que rompen el relativismo.

White (1983) adopta una postura antropológica para marcar el "locus" de realidad de las verdades matemáticas. Para esta autora las verdades matemáticas existen en la tradición cultural dentro de la que ha nacido el individuo y de esa manera penetran en su mente desde afuera. Pero, aparte de la tradición cultural, los conceptos matemáticos no tienen existencia ni significado. Las realidades matemáticas tienen así una existencia independiente de la mente individual, pero dependen por completo de la mente de la especie. Son el producto de la mente de la especie humana. Pero son halladas o descubiertas por cada individuo en la cultura matemática dentro de la cual se formó. El locus o lugar de la realidad matemática es la tradición cultural, es decir, el continuo de conductas expresadas con símbolos.

Godino y Batanero (1994) contextualizan la idea de validación de los significados de los objetos haciendo referencia a un consenso institucional sobre la adecuación de las prácticas para la resolución de los problemas de los que emergen los objetos.

Ernest (1991) hace un recorrido por la postura que adoptan diversas escuelas frente al objeto matemático. Las escuelas que llama absolutistas se ocupan de la coherencia del objeto; el platonismo plantea una existencia del objeto independientemente del sujeto, pero deja sin explicar la forma en que el sujeto interacciona con el objeto; el convencionalismo (Wittgenstein, 1988) sitúa en la práctica lingüística el locus de realidad de los objetos, con lo que el conocimiento matemático depende de las convenciones socialmente aceptadas acerca de nuestras prácticas lingüísticas; el empirismo clásico considera los objetos matemáticos como generalizaciones empíricas; el cuasi-empirismo de Lakatos (1976) establece una conexión entre el conocimiento y el sujeto, al plantear una teoría de creación del conocimiento que se basa en la actuación del sujeto. Finalmente, el constructivismo social del propio Ernest (1991) considera que los objetos matemáticos son construcciones sociales que existen objetivamente, son públicos, al haberse logrado un acuerdo entre los sujetos acerca de su existencia y propiedades.

La teoría del objeto y significado en matemática de Godino y Batanero (1994) hace un análisis fenomenológico de la relación entre el conocimiento individual y el conocimiento colectivo (institucional), lo que les permite llegar a relativizar la verdad del conocimiento individual en relación a una institución. Tanto en el conocimiento individual como en el institucional el objeto emerge de sus prácticas referidas a un campo de problemas.

c) La Matemática y la realidad:

Algunas posturas han fundado la verdad de las proposiciones matemáticas en función de la correspondencia entre el conocimiento matemático y la naturaleza sensible. Un análisis de esta relación nos permitirá afrontar la idea de verdad de una manera más completa.

La forma en que se concibe la relación entre los objetos matemáticos y la naturaleza está íntimamente ligada a la consideración de los objetos matemáticos. Copleston (1960) señala que la postura ontológica de los racionalistas europeos del renacimiento (Descartes, Spinoza, Leibniz), a los que se añade el dogma de Galileo (la naturaleza es de estructura matemática), hace que la ciencia renacentista considere que mediante la matemática se logra información sobre el mundo. Las creencias ligadas a que la matemática se descubre o se construyen suponen representaciones sobre la "realidad", pero también sobre la acción sobre los objetos. Será preciso, pues, recurrir al aspecto gnoseológico para establecer con más claridad esta relación matemática-naturaleza.

Cañón (1993) identifica dos posturas extremas. Una de ellas considera que la realidad está escrita en lenguaje matemático, con lo que el estudio de la matemática es clave para el estudio del cosmos. En el otro extremo se considera que la matemática resulta de idealizar los procesos de abstracción que se han realizado con objetos y problemas relacionados con la naturaleza y la experiencia. Esta cuestión vuelve sobre la relación entre el sujeto epistémico y el objeto matemático. La autora considera que la naturaleza adquiere significado en cuanto la mente humana interactúa con ella, de manera que el conocimiento matemático se constituye en una sucesión cambiante de modelos intermediarios entre la naturaleza percibida y el individuo.

La coherencia entre el conocimiento matemático y la realidad es una de las formas posibles de validar el conocimiento, a la que Cañón (1993) llama teoría de la correspondencia. Han aparecido otras formas de verdad a lo largo de la historia de la matemática. Cañón analiza la idea de verdad relacionándola con la forma en que se concibe que se accede al conocimiento. En primer lugar destaca las ideas de verdad ligadas a la consideración de que el conocimiento matemático es descubierto, como por ejemplo las ideas de los platónicos, quienes se basan en aceptar la existencia de un mundo subsistente de objetos propios y no reducibles al mundo de los sentidos, o los pitagóricos, que la fundamentan en la existencia de un mundo único, y Leibniz, que basa la verdad en la existencia de ideas innatas. Por otra parte estarían las posturas que parten de que el conocimiento matemático es creado, como los empiristas, quienes consideran que el conocimiento es cierto si se ha creado a partir de experiencias con objetos sensibles, mientras que la crítica kantiana considera que las verdades son creación de la razón. En sus conclusiones, Cañón indica varias cuestiones relacionadas con la verdad matemática. La necesidad del conocimiento matemático se sitúa entre dos posturas extremas, la primera de las cuales considera que la matemática proporciona proposiciones necesarias y ciertas, frente a la que considera que la matemática proporciona conocimientos contingentes y falibles.

El conocimiento matemático es necesario por estar encerrado en los propios objetos, es histórico y falible en su quehacer (Lakatos, 1978, Polya, 1966) y válido en un sentido de consistencia, al estar formulado en lenguaje formal.

También Ernest (1991) relaciona la construcción del conocimiento matemático con la verdad de sus afirmaciones. Las escuelas absolutistas, representadas en este caso por el logicismo de Russell y el formalismo, apoyan un concepto de verdad como coherencia. De esta forma para los logicistas la verdad matemática se puede reducir a la certeza de la lógica, mientras que para el formalismo, el sistema formal de la matemática debe ser consistente. Frente a estas dos escuelas, el constructivismo niega la verdad absoluta, abogando por una base en creencias subjetivas. Para apoyar esta última postura, Ernest recuerda que las escuelas absolutistas incurren en un círculo vicioso de verdad que ya había detectado Lakatos (1978).

d) Se amplían los aspectos ontológicos de la matemática:

Otros aspectos que se relacionan con la verdad del conocimiento matemático son los referentes al rigor, como una característica del método matemático. El formalismo parte de un lenguaje formalizado, y considera que el rigor es inherente al método matemático. En el otro extremo se desprecia el rigor por considerar que reduce las proposiciones matemáticas a proposiciones lógicas. Cañón (1993) intenta situarse entre estos extremos. Para ello parte de que la matemática trata de modelizar los procesos constructivos, con lo que el rigor es necesario en los procesos deductivos modelizadores.

Las relaciones de la matemática con el mundo físico nos llevan a discutir sobre la utilidad del conocimiento matemático para las otras ciencias. Una postura que ha estado ligada a escuelas formalistas considera que la belleza de la matemática es la razón de su estudio, y que su utilidad es secundaria. Las posturas utilitaristas (Ernest, 1989a) abogan por una matemática basada en las otras ciencias, rechazando el juego de los resultados de la matemática especulativa. Blanche (1973) pone de evidencia la dificultad de encajar una consideración especulativa del conocimiento matemático con la constatación de que las ciencias positivas emplean con éxito sus resultados. Esta constatación le hace a Cañón (1993) considerar que la belleza y la utilidad de la matemática no pueden separarse entre sí, ni separarlos del conocimiento matemático.

Una cuestión metafísica típica que destaca Tymoczko (1986) se plantea: ¿Hay objetos abstractos o todos los objetos particulares concretos existen en el espacio y tiempo? Obviamente, para los defensores de las posturas formalistas, en la matemática existen objetos abstractos. Una defensa del fisicalismo o de la visión de que todos los objetos son objetos espacio-temporales, podría encerrar más naturalmente una interpretación constructiva de la matemática.

e) Formas de desarrollar el conocimiento matemático:

Ernest (1991) diferencia lo que él llama visión absolutista, que se caracteriza por considerar que el conocimiento matemático está compuesto de verdades absolutas, de la visión falibilista, según la cual la verdad matemática es falible y corregible y no puede verse como absoluta. Argumenta que las escuelas absolutistas (entre las que introduce el logicismo de Russell y el formalismo de Hilbert) caen en un círculo vicioso al tratar de establecer la verdad de las proposiciones matemáticas, ya que cualquier sistema matemático depende de un conjunto de supuestos, y al intentar establecer la verdad de estos supuestos se llega a una regresión infinita.

La postura falibilista de Ernest está basada en la matemática informal de Lakatos, quien proyecta en la matemática las teorías científicas de Popper. Lakatos (1978) plantea el "descubrimiento" matemático según un proceso que resume en los siguientes pasos:

- ✓ Conjetura primitiva;
- ✓ Prueba;
- ✓ Contraejemplos globales;
- ✓ Nuevo examen de la prueba (Lakatos)

En consonancia con el planteamiento de Lakatos, Douady (1986) identifica "hacer matemática" con resolver problemas, adaptar lo que conocemos al contexto, hacer conjeturas e intentar validarlas o refutarlas. Polya (1966) diferencia entre razonamiento demostrativo y razonamiento plausible, diciendo "El resultado de la labor demostrativa del matemático es el razonamiento demostrativo, la prueba, pero ésta a su vez es descubierta mediante el razonamiento plausible, mediante la intuición"

Cañón recoge de Kuhn (1975) una pregunta más genérica: ¿Cómo avanzan las ciencias? Resume Cañón (1993) dos tipos de respuestas a esta última pregunta. La que dan los modelos globales, como los de Wilder (modelo global evolutivo, para el que la cultura crece por varios formas de presión) y el de Kitcher (modelo global acumulativo, que caracteriza la práctica matemática como una quintupla ordenada: lenguaje, proposiciones matemáticas, formas de razonamiento, cuestiones, puntos de vista metamatemáticos, y en la que los pasos de una quintupla a otra se detectan por cambio en alguna componente), y el modelo de las etapas de génesis, de Lakatos.

Cañón se sitúa en una postura intermedia a las descritas en la oposición deducción - razonamiento plausible (Polya, 1966) que hemos presentado a partir de las escuelas logicista- formalista y falibilista. Para ella, la racionalidad matemática busca reducir la complejidad de la naturaleza, para lo que emplea la lógica como un instrumento necesario, que por sí solo no cubre todo el significado de la aceptación del conocimiento matemático. Respecto a la otra oposición formalismo-cuasi-empirismo, sobre el proceso de hacer matemática, Cañón aboga por la contextualización histórica del conocimiento, en un proceso que recuerda las etapas de Kuhn (1975/1962), en el que hay que distinguir diversos momentos en la evolución de las teorías; cuando las teorías se consideran suficientemente maduras pueden constituirse en axiomas de los que partir, por procesos que pueden ser de conjeturas y falseamiento de nuevas hipótesis.

f) Validación del conocimiento matemático:

La postura antropológica de White marca el proceso de institucionalización de los conceptos matemáticos, como forma de integración en la cultura social. Es de destacar que White considera inevitables las invenciones matemática culturales en unas condiciones sociohistóricas determinadas, lo que coincide con la idea de necesidad defendida por Cañón (1993).

El constructivismo social de Ernest (1991 y 1994a y b) sitúa en la sanción social la forma de validación del conocimiento. Pero además, Ernest destaca la importancia de la intervención de los iguales en la gestación del conocimiento, lo que le hace destacar el papel del debate en la construcción del conocimiento individual.

Ponte (1992), resume su postura epistemológica dando unas características fundamentales del saber matemático. Para Ponte, el saber matemático, en primer lugar está en permanente evolución. En segundo lugar, puede ser concebido como producto (conjunto de teorías bien determinadas) y como proceso (como una actitud). Además es un saber científico, esto es: formalizado, es decir, sigue una lógica bien definida, verificable, ya que permite establecer consensos acerca de la validez de cada resultado, universal, por tener un carácter transcultural, y ser aplicable a variedad de contextos y situaciones, y generativo, ya que permite llevar al descubrimiento de cosas nuevas.

Lerman (1994a) apunta otro aspecto relacionado con la forma de validación del conocimiento. Para el constructivismo social, el sujeto adjudica al objeto significados que están implícitos en la cultura, producidos por acuerdo social. Para el constructivismo radical, el significado importante para cada sujeto es el que él mismo le asigna en función de su experiencia y esquemas previos.

3.1.2. Visión epistemológica de la educación en matemática.

Vergnaud (1990) dice que esta rama hereda las cuestiones de las epistemologías de la matemática y de la psicología, añadiendo otras cuestiones tales como: ¿Cuál es la relación entre nuevas competencias y concepciones matemáticas y los problemas teóricos o prácticos que las hacen útiles y significativas? ¿Qué relación existe entre conocimiento y problemas?

Desde el punto de vista del profesor, las preguntas que nos planteamos son más abiertas, referidas a la enseñanza y el aprendizaje. Entre las correspondientes al aprendizaje:

¿Qué es saber matemática? ¿Qué es comprender matemática? ¿Cómo se aprenden? Y Desde la enseñanza, ¿Qué es enseñar matemática? ¿Cómo se enseñan? ¿Qué matemática enseñar?

Los elementos del segundo nivel del modelo de ideología de Ernest (1991) están relacionados con la enseñanza y el aprendizaje. Ernest indica que la distinción con los elementos del primer nivel no es absoluta, sino que se diferencian por la especialización que suponen para la educación matemática. Entre estos elementos aparecen concreciones de los elementos del primer nivel a la educación matemática, como una teoría del conocimiento matemático escolar y los objetivos de la educación matemática. Otros elementos se refieren a teorías para analizar el proceso de enseñanza y aprendizaje, como la teoría de la enseñanza de la matemática y la teoría de recursos para la educación matemática. Partiendo de la base de que "la enseñanza es sólo un instrumento para el aprendizaje", Ernest demanda una teoría del aprendizaje de la matemática. También una teoría de la evaluación del aprendizaje matemático. La raíz social de su modelo le hace requerir una teoría de la habilidad matemática y una teoría de la diversidad social en educación matemática.

Como en los aspectos de epistemología de la matemática, separamos los aspectos referentes a aprendizaje de aquellos referentes a la enseñanza, aun reconociendo la interferencia existente entre las creencias de profesores y alumnos referidas a ambos campos.

3.1.3. Formas del aprendizaje de la matemática.

La primera pregunta que afrontamos se refiere a la esencia del aprendizaje:

3.1.3.1. ¿Qué es aprender?

La primera respuesta a estas preguntas puede establecerse desde las teorías psicológicas del aprendizaje. Pozo (1989) distingue dos grandes corrientes en la interpretación del aprendizaje: las teorías asociacionistas y las teorías estructuralistas. Mientras que las asociacionistas parten de una actitud analítica, que les hace descomponer los procesos psicológicos en unidades elementales, las estructuralistas consideran que las unidades de estudio de la psicología son globalidades que no pueden reducirse atomísticamente.

La postura conductista es la que ha tenido más auge en la corriente asociacionista que tiene su origen en el empirismo inglés, según el cual el conocimiento se alcanza mediante la asociación de ideas siguiendo ciertos principios (semejanza contigüidad espacial y temporal y causalidad). Este asociacionismo se complementa con otras características, que no son compartidas por todos los conductistas. El más conocido es lo que Pozo llama reduccionismo antimentalista, es decir, la negación de los estados y procesos mentales (p. 26). Otros rasgos que se han aplicado al conductismo son la teoría estímulo-respuesta, con lo que se parte de una consideración atomista y elementalista derivada directamente del núcleo asociacionista, por el que toda conducta, por compleja que sea, es reducible a una serie de asociaciones entre elementos simples, en este caso, estímulos y respuestas (Pozo, p. 28). También se asocia al conductismo la idea de ambientalismo, y la de equipotencialidad, siguiendo la cual las leyes del aprendizaje son igualmente aplicables a todos los ambientes, especies e individuos (p. 29). El siguiente paso en la psicología del aprendizaje lo constituye el procesamiento de la información, que parte de la metáfora de la mente como un ordenador. Los rasgos característicos del procesamiento de la información son: a) la descomposición recursiva de los procesos cognitivos; b) el funcionamiento cognitivo humano, al igual que el ordenador, están definido por leyes exclusivamente sintácticas, que se ocupan de determinar las reglas mediante las que esas actividades se agregan para constituir procesos complejos; c) irrelevancia de los contextos culturales y la afectividad.

Las teorías estructuralistas parten de una idea del sujeto como un organismo cambiante, que modifica la realidad al conocerla, con lo que su papel es activo. Esto obliga a estudiar los procesos de cambio del organismo y los fenómenos que los posibilitan. Para Piaget este cambio es un proceso dialéctico de asimilación y acomodación, mediante el cual el sujeto comienza por alterar la realidad para encajar en sus estructuras mentales, y posteriormente altera sus estructuras para adaptarlas a la forma en que percibe los fenómenos. Se produce así un proceso de equilibración continuo a lo largo del desarrollo del individuo. Vygotskii, también desde una postura estructuralista, introduce en el esquema Estímulo - Respuesta un mediador, que está constituido por el signo. Ello le lleva a distinguir el aprendizaje espontáneo del aprendizaje científico. El primero puede explicarse en términos asociacionistas, mientras que para que se produzca el segundo exige una reestructuración basada en un sistema de signos que median nuestras acciones, a la vez que modifica la persona que interactúa con su entorno. Estos signos son proporcionados por la cultura, el medio social, con lo que el proceso de desarrollo del aprendizaje iría del exterior al interior mediante un proceso de internalización o transformación de las acciones externas, sociales, en acciones internas, psicológicas. La ley fundamental de la adquisición del conocimiento para Vygotskii afirmaría que éste comienza siendo objeto de intercambio social, es decir, comienza siendo interpersonal para, a continuación, internalizarse o hacerse intrapersonal (Pozo, 1989, p. 196).

También Farnham-Diggory (1994), nos permite resumir las posturas expuestas para responder a la primera pregunta planteada en relación al aprendizaje, aunque encierra también aspectos de competencia que serán contemplados en el apartado relativo a ¿Qué es saber matemática?. Farnham-Diggory, que habla de paradigmas educativos, diferencia los paradigmas en función de dos factores. El primero es la forma en que cada paradigma concibe que el sujeto "sabe", "ha aprendido", o, empleando sus términos, "que el alumno es experto". El segundo se refiere a la forma de concebir las actividades que debe hacer el alumno para saber, "para pasar de ser novato a ser experto". Surgen así tres paradigmas, que según Farnham-Diggory, son excluyentes: el modelo conductista, el modelo de desarrollo y el modelo de aprendizaje. En el modelo conductista, aprender (ser experto) es alcanzar una posición dentro de una escala; en el modelo de desarrollo, aprender es alcanzar un modelo cualitativamente diferente al que se poseía antes de ese aprendizaje (cuando se era novato); para el modelo de aprendizaje aprender es alcanzar un mundo social diferente en cultura y práctica del mundo del novato. El segundo factor de diferencia entre estas conceptualizaciones del aprendizaje se refiere a la forma en que se adquiere el aprendizaje.

Tymoczko (1986) estudia la relación que existe entre la postura filosófica sobre la matemática y la filosofía de la mente, que obviamente se relaciona con los procesos para aprender. Empleando la dicotomía constructivismo - realismo, Tymoczko argumenta que si aceptamos una visión constructivista de la matemática, entonces concebimos la matemática como una actividad mental, que encajará en una cierta teoría de la mente en la que se aceptaría que todos nacemos con la posibilidad de hacer matemática. Por otra parte, si nos situamos en la postura realista, la filosofía de la mente consiguiente, aceptaría que la mente está dotada de una facultad primitiva de intuición matemática o percepción del reino de la matemática.

También Vergnaud, que habla del constructivismo psicológico, postura en la que reconoce que se encuentran la mayoría de los psicólogos interesados en educación matemática, considera que las competencias y concepciones son construidas por los estudiantes. Aprender matemática es construirlas, hacer. Esta construcción es planteada como respuesta a un conflicto cognitivo por los psicólogos constructivistas sociales, tal como veremos más adelante.

Las posturas constructivistas difieren en la forma de concebir el aprendizaje como construcción. Como señala Ernest (1994c), el principio constructivista puede ser un mito ingenuo. Lerman (1994) diferencia entre posturas constructivistas sociales, representadas por Gergen en educación matemática y por la psicología cultural de Vygotskii, y las constructivistas radicales, basadas en los principios de von Glasersfeld (1995/1981) en educación matemática y por la psicología individual de Piaget. Lerman emplea metáforas para referirse a la forma de concebir el aprendizaje en cada postura. En el constructivismo social la metáfora de aprendizaje es la apropiación, mientras que en el constructivismo radical, la metáfora es construcción propiamente dicha. Con ello el autor quiere diferenciar el papel individual de la construcción y del constructivismo radical, de la actuación compartida social del aprendizaje apropiación. Ernest (1994c) indica las dificultades que encuentra en el constructivismo radical en relación al aprendizaje, al indicar que en esta teoría no se indica la forma en que aparece el conocimiento comunicable. También Kilpatrick (1983) llama la atención sobre el fanatismo que puede llevar a apoyar radicalmente el constructivismo.

Como vemos, los elementos de la epistemología de la matemática inciden en estas posturas de la educación matemática. ¿Qué es construir matemática? ¿Cuáles son los conflictos cognitivos concernientes a la matemática? Para responder a estas preguntas hay que volver a las posturas ontológicas y gnoseológicas de la epistemología de la matemática.

3.1.3.2. ¿Qué es saber matemática?

Douady (1986), en consonancia con las posturas eclécticas epistemológicas de Dou (1973) y Kline (1985), identifica "saber matemática" con ser capaces de usarlas en diferentes situaciones. Distingue dos posibles actitudes del alumno a instancia del profesor: si se dice qué hay que hacer, siendo posible comprender el enunciado del problema pero sin sugerir el método de solución, estamos considerando principalmente la matemática como herramienta; si se trata de conocer cómo las nociones están relacionadas desde un punto de vista científico cultural estamos considerando principalmente la matemática como objeto. Más adelante concreta "tener algún conocimiento de matemática" es ser capaz de implementar su empleo como una herramienta explícita en problemas a resolver.

Ponte (1992) utiliza metáforas para diferenciar las formas del aprendizaje y del saber. La metáfora del jardinero contempla el saber cómo preexistente e independiente de la maduración ("planta" por la que cuida el profesor jardinero). Según la metáfora del "aprendiz", la maduración deriva de la observación y acompañamiento al maestro, viendo cómo este lo hace; en esta metáfora, el saber adquiere una forma algo difusa, siendo especialmente práctico, tácito, difícil de formular. En la metáfora de la enseñanza de la matemática de la "escuela de samba" (Papert, 1981), todos son maestros y aprendices al mismo tiempo, y se produce la expresión de un ambiente de vocación para estimular la creatividad. La metáfora del matemático "creativo" contempla que el alumno debe investigar situaciones, resolver problemas formulados por sí mismo e incluso inventar conceptos y notaciones. La metáfora del "ingeniero" ve al alumno como una persona situada delante de una situación compleja que procura poner en juego diferentes métodos de resolución a su alcance, modificándolos eventualmente o combinándolos para llegar a la solución (Flores, 1997).

3.1.3.3. ¿Cómo aprender matemática?

Siguiendo a Brousseau (1989), Robert y Robinet (1989) sitúan las actividades para aprender entre los tres polos siguientes: se aprende por la escucha e imitación / únicamente por actividades / por una dialéctica actividades bien elegidas - intervenciones magistrales.

Peterson (1989) formulan una oposición entre los términos: los alumnos construyen activamente su propio conocimiento / reciben pasivamente el conocimiento matemático del profesor u otro. En la concepción interna aristotélica, que señala Dossey (1992), aprender matemática es equiparado con hacer matemática.

Los tres paradigmas educativos indicados por Farnham-Diggory (1994), también marcan formas de llegar al aprendizaje: el modelo conductista plantea el aprendizaje a través del aumento de destrezas; el modelo de desarrollo considera que se llega a aprender proporcionando a los estudiantes teorías personales, para lo cual se debe perturbar al estudiante cuestionando, contradiciendo y cambiando estas teorías; por último el modelo de aprendizaje considera el aprender como un proceso de enculturación.

El resultado del aprendizaje es el conocimiento, tal como lo concibe Farnham-Diggory (1994). Este autor diferencia cinco formas de conocimiento: el declarativo (que acepta el lenguaje como vehículo de comunicación y validación); conocimiento procedimental (en forma de secuencias de acción); conocimiento conceptual (de categorías listas de atributos, y esquemas añaden atributos espacio temporales); conocimiento analógico (conserva la correspondencia entre el mundo exterior y el interior); y conocimiento lógico (sistemas de implicaciones causales).

Para caracterizar el conocimiento/aprendizaje, Ponte (1992) establece cuatro niveles de competencia. Las competencias elementales son procesos de simple memorización y ejecución. Las competencias intermedias, o procesos con cierto grado de complejidad pero que no exigen mucha creatividad. Las competencias complejas suponen capacidad significativa de tratar con situaciones nuevas. Y, por último, los saberes de orden general, que tienen componentes metacognitivas, en los que el aprendiz tiene conciencia de su saber (metasaber). Estos saberes tienen influencia en las propias concepciones del aprendiz. Cada uno de estos tres primeros niveles supone un dominio del anterior, mientras que el cuarto nivel, tiene un papel regulador. La manifestación del aprendizaje en cualquiera de estos niveles, se realiza en dos tipos de actividades, según Ponte: actividades de acción, en las que se manipulan objetos y representaciones; y actividades de reflexión, en las que se piensa sobre la acción. Estas actividades de reflexión son estimuladas por la explicación y la discusión.

3.1.3.4. Otras formas de aprendizaje de la matemática.

¿En qué orden se deben secuenciar los contenidos para el aprendizaje? Peterson (1989) diferencian las posturas entre los polos siguientes: la estructura de la matemática debe proporcionar la base para secuenciar las nociones durante la instrucción / el desarrollo de las ideas matemáticas en los alumnos debe proporcionar la base para secuenciar.

Por último, una cuestión que ha dado lugar a diferentes respuestas se refiere a los sujetos que intervienen en el aprendizaje. Robert y Robinet (1989) llaman a esta cuestión "articulación cognitivo (individual)/social" y la sitúan entre los dos polos siguientes: el aprendizaje es un fenómeno individual / el aprendizaje de la matemática tiene que tener una fase colectiva.

3.1.3.5. ¿Cómo enseñar la matemática?

Esta primera pregunta incide en la esencia de la enseñanza. Las respuestas a esta pregunta se relacionan con las formas de concebir el paso de novato a experto, en la terminología de Farnham-Diggory. También se relacionan con la concepción epistemológica de la matemática, por ejemplo en lo que concierne a la relación entre el enseñante y el saber. Robert y Robinet (1989) indican dos extremos en la concepción de esta relación: el profesor es el único y verdadero poseedor del saber en clase / muchas cosas pueden ser descubiertas por los alumnos solos, incluso por procedimientos que el profesor no ha previsto.

Farnham-Diggory. (1985) diferencian familias de modelos de enseñanza, en los que implícita o explícitamente hay una forma de concebir la enseñanza. Estos modelos están relacionados con los modelos de aprendizaje ya citados. Para el modelo de procesamiento de la información, enseñar es mejorar la capacidad de procesar la información de los alumnos, entendido como incrementar el manejo de estímulos del medio, afianzar datos, generar conceptos y soluciones y utilizar símbolos verbales y no verbales. Los modelos personales orientados hacia el desarrollo del yo individual, consideran enseñar cómo ayudar al individuo a desarrollarse, con lo que se mejorarán las relaciones personales y la capacidad de procesar información. Para los modelos de interacción social la enseñanza se interesa en las relaciones entre el individuo y otras personas, dando prioridad al proceso democrático y al trabajo social productivo. Por último, en los modelos conductistas enseñar es cambiar el comportamiento visible del sujeto más que la estructura psicológica y la conducta no observable, lo que les hace basarse en principios de control de estímulos y refuerzos, fraccionando el comportamiento en pequeños segmentos de conducta. Según Joyce y Weil (1985), estos modelos se diferencian en la sintaxis (secuencia de actividades para enseñar, el cómo enseñar), la organización del sistema social (papel de los sujetos implicados en la enseñanza), los principios de reacción (estrategias y reglas que se emplean para sintonizar con el alumno y responder a lo que hace), los sistemas de apoyo (condiciones que necesitan) e importancia concedida a los efectos didácticos y educativos (prioridades y deseabilidad de los efectos instruccionales y educativos).

La sintaxis de los modelos nos sitúan frente a la cuestión del cómo enseñar, qué actividades hay que realizar para enseñar, cómo organizar la secuencia de actividades para enseñar.

b) Tácticas para la enseñanza de la matemática:

Farnham-Diggory (1994) indican cuatro tácticas de enseñanza, que responden a la sintaxis de la enseñanza: hablar o leer; exponer; entender; organizar el entorno del aprendizaje. Según el autor, estas cuatro tácticas aparecen en diferentes grados en todos los tipos de enseñanza que hemos citado anteriormente.

Robert y Robinet (1989) analizan el papel del profesor en la clase de matemática, estableciendo el continuo comprendido entre la clase magistral (explicar, repetir, repetir variando las explicaciones, realizar ejercicio de aplicación después de la clase) y la actuación del profesor como organizador de las actividades del alumno en clase, pasando una parte del tiempo supervisando el aprendizaje que se realiza por la acción. Peterson (1989) formulan la oposición entre organizar la instrucción para facilitar la clara presentación del contenido por parte del profesor / para facilitar la construcción del conocimiento de los alumnos.

Ernest ha realizado varios análisis en relación con el papel del profesor. En 1985, Ernest establecía un continuo entre formas autoritarias y formas democráticas de enseñanza. Los puntos de conflicto entre estos polos son los siguientes: a) Caminos mediante los que se presenta la materia (características de las definiciones, aproximación a las pruebas y demostraciones formas estilizadas "mitificadas" o emplearlas para estimular el razonamiento plausible, actitud del profesor hacia las técnicas y algoritmos -métodos "oficiales" o estimular los métodos de los alumnos). b) Formas de intervenir en el trabajo de los estudiantes (formas de control, cómo se tratan los errores, el control de las respuestas, etc.). c) Organización de la clase (colocación y distribución de los alumnos separados, en grupo, acceso al material, vía de selección de tareas para los alumnos, tipo de preguntas que hace el profesor, etc.). d) Relaciones que se permiten o se estimulan y relaciones que se evitan (competición individual o en colaboración, trabajando en grupos). e) El curriculum, (como se dirige el profesor a los alumnos -clase expositiva y magistral o mediante proyectos y grupos de trabajo individualizado, forma en que las diferentes partes se conectan -predeterminados los contenido y secuencia o abrir una consulta, elección y negociación entre el profesor y los alumnos, a quién se dirige el profesor a la experiencia o a los intereses de los alumnos).

En otro momento, Ernest (1989) relacionó la forma de enseñanza con la forma en que el profesor concibe la matemática, clasificando en tres posturas: utilitarista, platónica y constructiva. Los criterios para clasificar los modelos de aprendizaje son dos. El primero está relacionado con la concepción del aprendizaje, que puede extenderse de considerar el aprender como construcción activa del conocimiento como un cuerpo significativamente conectado (constructivismo), a considerarlo como recepción pasiva de conocimiento (platonismo). El segundo se refiere a la autonomía del alumno, y se extiende entre enfatizar el desarrollo de la autonomía y los propios intereses del niño en Matemática (constructivismo), o considerar al aprendiz como sumiso y complaciente (platonismo). Los criterios para diferenciar la enseñanza son tres. El primero se refiere al tipo de las tareas, que pueden ser concebidas con carácter instrumental y básicas, frente a una forma de concebirlas más creativas y con fines exploratorios. El segundo se refiere a la forma de considerar el cuerpo de conocimientos que se tratan en la enseñanza: desde hechos y dominios de tareas centradas en el éxito y la respuesta correcta, hasta conocimientos significativos, comprendidos y unificados. El tercero está ligado a la forma en que se concibe el uso del material curricular: la matemática basada en seguir estrictamente un texto o un esquema, frente a la postura en que el profesor o la escuela construyen virtualmente todos los materiales curriculares de matemática, pasando por a un punto de vista en que el profesor enriquece el texto con problemas y actividades adicionales.

Ernest (1989a) utiliza un paralelismo similar al realizado por Copes (1982), entre los niveles del desarrollo de Perry (1970), y posibles posturas del profesor de matemática frente a la filosofía de la matemática. También, como Copes, señala cinco posturas, las cuatro primeras absolutistas y la quinta falibilista: absolutista dualista, absolutista multiplicista, absolutista relativista separado, absolutista relativista concentrado y falibilista relativista. A estas cinco posturas epistemológicas y éticas que puede adoptar el profesor les asocia en cinco grupos sociales que se corresponden con actitudes ante la educación matemática, respectivamente: entrenador industrial, viejo humanista, educador progresista, pragmático tecnológico y educador público. Con estos cinco grupos, Ernest contempla la diferencia entre la visión absolutista del mundo en que ha sido basada habitualmente la educación matemática, y la visión basada en el constructivismo social.

Ernest diferencia el educador progresista del educador público en que el primero enfatiza lo individual y el segundo lo social. Pero, como Steffe (1992) indica, la postura falibilista del educador público no toma en consideración los aspectos psicológicos de la construcción del conocimiento matemático subjetivo; a su vez, el educador progresista necesita expandir sus supuestos para incluir la teoría de la sociedad (Steffe, 1992)

Douady (1986) categoriza el trabajo del profesor y de los alumnos en el continuo cerrado entre dos posturas extremas. En la primera el profesor presenta los objetos de manera adaptada al contenido y a sus alumnos. Para ello presenta definiciones, ejemplos y teoremas, si es posible, demostrándolos; los alumnos deben dar sentido a las ideas y utilizarlas como herramientas; o bien muestra algunos prototipos y desarrolla usos familiares; el profesor se inclina por reducir el contenido a los algoritmos; los alumnos son enfrentados a objetos y debe usarlos como herramientas. En la segunda, el profesor contextualiza el contenido en situaciones variadas y, para darles significado, organiza estas situaciones de manera dinámica. El contenido es supuesto como herramienta, y al cambiarlo es descontextualizado para alcanzar el estado de objeto. Los alumnos deben comprender el problema, establecer relaciones para hacer conjeturas y examinar consecuencias. El alumno se enfrenta a herramientas y debe transformarlas en objetos (todos o una parte de ellas).

Skemp (1978) señala otras forma de diferenciar la matemática enseñadas, relacionada con la concepción de la matemática, ya que, como dice Skemp lo que caracteriza el conocimiento es la forma de conocerlo (p. 14). Distingue Skemp entre matemática relacional y matemática instrumental. Esta matemática están ligadas a dos formas de comprensión: relacional e instrumental.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS DE LA APLICACIÓN DE LA ENCUENTA DE CREENCIAS Y PERCEPCIONES SOBRE LA E – A DE ESTUDIANTES DE MATEMÁTICA

4.1. FORMULACIÓN DE CUESTIONARIOS PARA LA ENCUESTA

ENCUESTA SOBRE CREENCIAS Y PERCEPCIONES SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE A LOS ESTUDIANTES MATEMÁTICOS DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SANTA

Estimado(a) estudiante:

Como parte del trabajo de proyecto de investigación monográfica estoy interesado en conocer su opinión con respecto a Creencias y Percepciones de la Enseñanza y Aprendizaje de Matemática. Le pedimos, con mucho respeto, que complete la información del presente cuestionario con el mayor detalle posible. La información suministrada será manejada confidencialmente, sin evidenciar casos particulares.

Muchas gracias.

A. INFORMACIÓN GENERAL

1. Género: Masculino: ……… Femenino: ……………

B. FORMULACIÓN DE ÍTEMS

Responda con veracidad y legibilidad c/u de los interrogantes; si crees que es verdad marque con unas aspa el casillero de “SI”, y si no es cierto el casillero de NO

N°	CUESTIONARIOS	SI	NO
01	Crees que la matemática es útil y necesaria en todos los ámbitos de la vida		
02	Crees que la matemática es difícil, aburrida y alejada de la realidad		
03	Crees que las destrezas o habilidades utilizadas en las clases de matemática ayudan para resolver problemas en la vida cotidiana		
04	Crees que en matemática es fundamental aprenderse de memoria los conceptos, fórmulas y reglas		
05	Utiliza convenientemente los medios y materiales de la actualidad, como son las tecnologías de informática y computación		
06	Crees que si no se comprenden la matemática, difícilmente se podrán asimilar y dominar otras asignaturas relacionadas con ella (como física, química, etc.)		
07	Crees que los contenidos de matemática tienen aplicación en tu vida cotidiana		
08	El profesor utiliza diversos procedimientos y técnicas en las actividades de sus clase		

4.2. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE LA ENCUESTA

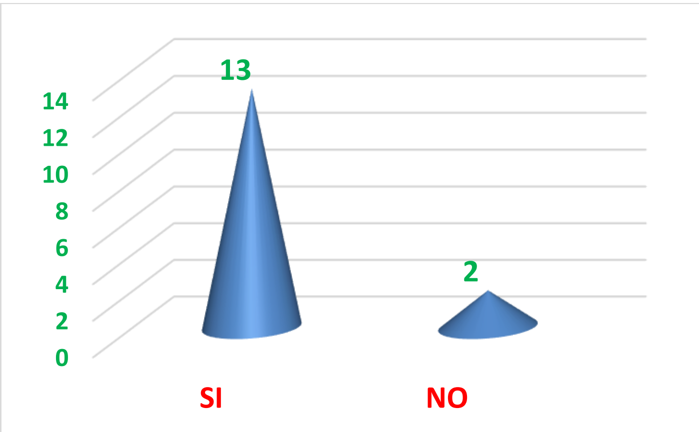
En total se encuestó 15 estudiantes para el profesor (a) de matemáticas en la Universidad Nacional del Santa.

Todos los resultados de la encuesta realizada, se procesó los datos y se reportó mediante gráficas de barras para cada pregunta de la encuesta.

1. Crees que la matemática es útil y necesaria en todos los ámbitos de la vida

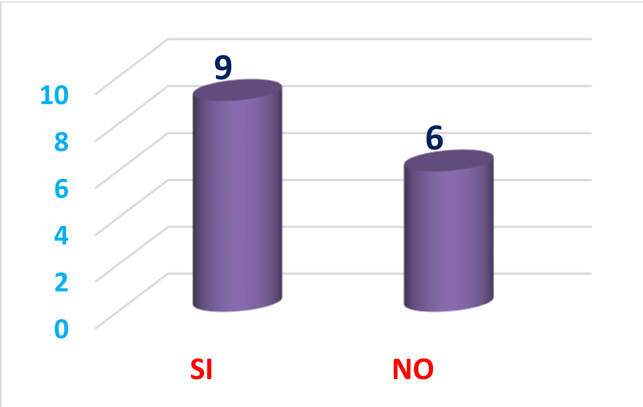
ANÁLISIS DE LA PREGUNTA (01): De los datos de la encuesta se percibe que el 60 % de los encuestados creen que la matemática es útil y necesaria en todos los ámbitos de la vida cotidiana, mientras que el 40% no creen, el cual indica que los estudiantes en formación para los profesores de matemática suelen recurrir a la matemática de manera casi inconscientes, no valoran o no aplican sus conocimientos en la vida cotidiana.

2. Crees que la matemática es difícil, aburrida y alejada de la realidad



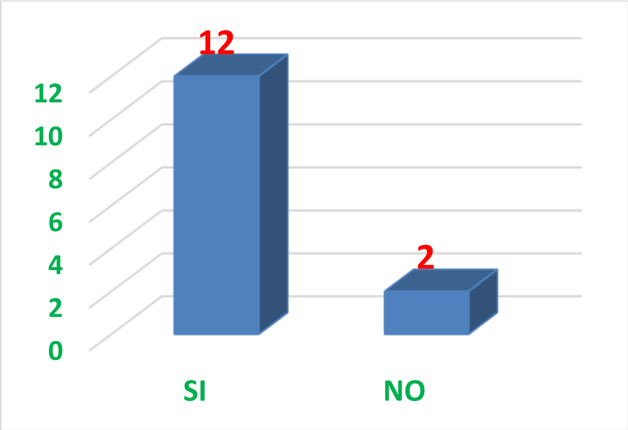
ANÁLISIS DE LA PREGUNTA (02): De los datos procesados se aprecia que 86% de los encuestados afirman que la matemática es difícil, aburrida y alejada de la realidad, mientras el 14% responden lo contrario; según Ernest, Lerman y Ponte (1994) definen que el alumno construye sus propios conocimientos, a partir de sus estructuras cognitivas anteriores, hace referencia que la matemática es una secuencia lógica y reflexión de la percepción de los conocimientos matemáticos, como es el caso de la derivada de una función que es muy importante en la aplicación de la ingeniería para determinar secciones de Máxima eficiencia hidráulica de un canal trapezoidal, circular, rectangular, etc.

3. **Crees que las destrezas o habilidades utilizadas en las clases de matemática ayudan para resolver problemas en la vida cotidiana**



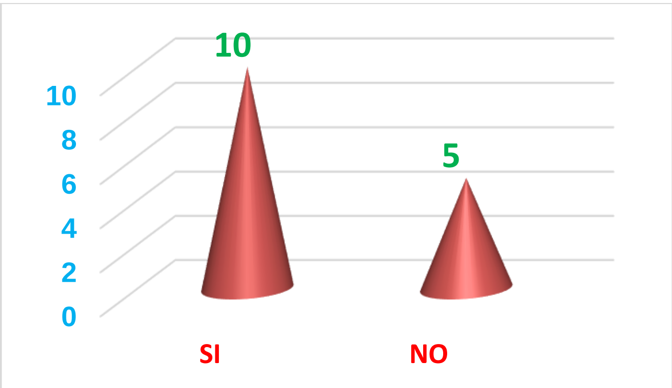
ANÁLISIS DE LA PREGUNTA (03): De los datos procesados se aprecia que 60% de los encuestados afirman que las destrezas o habilidades en matemáticas ayudan a resolver problemas en la vida cotidiana, mientras el 40% responden lo contrario; según los autores Cooney y Ponte, (1992); Clark, Shulman y Peterson (1986); indican que la formación de profesores debe tomar en consideración la explicitación y cambio de concepciones de los estudiantes para profesor de matemáticas; de lo cual se puede inducir que no basta ser un buen calculista matemático, si no el que toma conciencia y creencia en sus conocimientos, habilidades y destrezas que ayuda mucho en resolver problemas en la vida cotidiana.

4. **Crees que en matemática es fundamental aprenderse de memoria los conceptos, fórmulas y reglas**



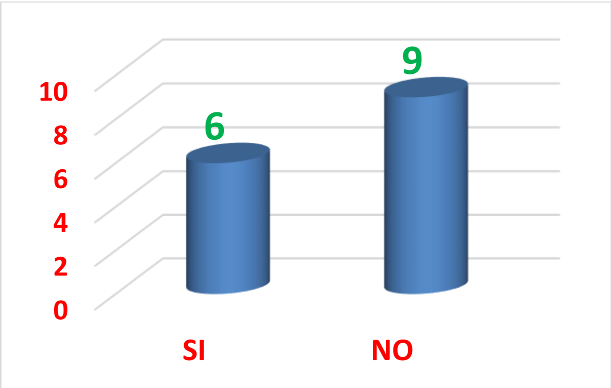
ANÁLISIS DE LA PREGUNTA (04): De los datos procesados se aprecia que 85% de los encuestados creen que la matemática es fundamental aprenderse de memoria los conceptos, formulas y reglas, mientras el 15 % no creen. Según Ponte (1992) indica que las creencias son a menudo discutibles, más inflexibles y menos dinámicas que otros aspectos del conocimiento. Las creencias juegan un papel más importante en aquellos dominios del conocimiento matemático en los que la verificación es difícil o imposible. Esto implica que no podemos vivir y actuar sin creencias, uno de los más importantes fines del conocimiento es discutir y promover la toma de conciencia de ellas, porque la matemática es una ciencia abstracta que para llegar a un resultado es necesario recurrir a conceptos, fórmulas y reglas para seguir un procedimiento lógico.

5. **Utiliza convenientemente los medios y materiales de la actualidad, como son las tecnologías de informática y computación**



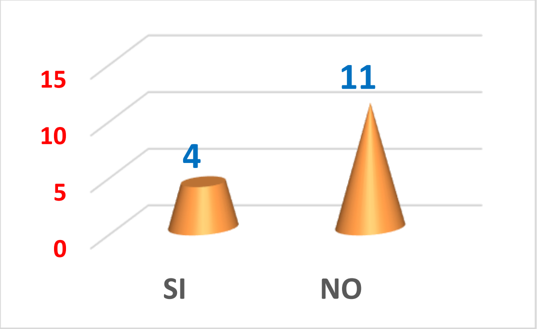
ANÁLISIS DE LA PREGUNTA (05): De los datos procesados se aprecia que 67% de los encuestados utilizan convenientemente los medios y materiales de la actualidad, como son: las tecnologías de información y computación, mientras el 33% no utilizan, esto infiere que mucho de los estudiantes no hacen uso de las TICs para mejorar el nivel de enseñanza y aprendizaje ya que la matemática es una ciencia deductiva que se dedica al estudio de las propiedades de los entes abstractos y de sus relaciones como los símbolos, números y figuras geométricas que requieren de su representación en 2D y 3D para una mejor percepción y entendimiento de sus elementos, sus formas, áreas, volúmenes; etc.

6. **Crees que si no se comprenden la matemática, difícilmente se podrán asimilar y dominar otras asignaturas relacionadas con ella (como física, química, etc.)**



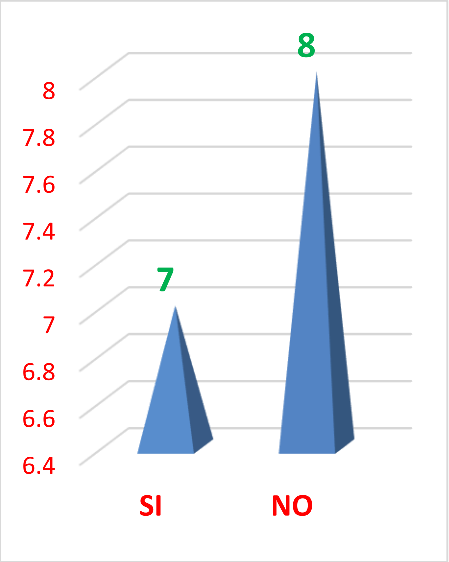
ANÁLISIS DE LA PREGUNTA (06): De los datos procesados se aprecia que 40% de los encuestados creen que si no se comprenden la matemática, difícilmente se podrán asimilar y dominar otras asignaturas relacionadas con ella (como física, química, etc.), mientras que el 60% no creen. La matemática trabaja con cantidades (números) pero también con construcciones abstractas no cuantitativas. Su finalidad es práctica, ya que las abstracciones y los razonamientos lógicos pueden aplicarse en modelos que permiten desarrollar cálculos, cuentas y mediciones con correlato físico; Podría decirse que casi todas las actividades humanas tienen algún tipo de vinculación con la matemática, esos vínculos pueden ser evidentes, como en el caso de la ingeniería, o resultan menos notorios, como en la medicina o la música.

7. **Crees que los contenidos de matemática tienen aplicación en tu vida cotidiana**



ANÁLISIS DE LA PREGUNTA (07): De los datos procesados se aprecia que el 27% de los encuestados creen que los contenidos de la matemática tienen aplicaciones en la vida cotidiana, mientras el 73% creen que no son aplicables, según los autores Godino y Batanero (1994), informa que los profesores comparten con sus compañeros destrezas y experiencias para afrontar los problemas cotidianos, están realizando una reflexión de carácter práctico del contenido de la matemática, podemos decir que el contenido de la matemática está asociado a la vida cotidiana para resolver problemas, como controlar los gastos de alimentación en hogar, vestimenta, gastos escolares de los hijos, etc.

8. **Los profesores utilizan diversos procedimientos y técnicas en las actividades de sus clase**



ANÁLISIS DE LA PREGUNTA (08): De los datos procesados se aprecia que el 53% de los encuestados indican que los profesores no utilizan procedimientos, ni técnicas en el desarrollo de su clase; Román y Diez (1989) informan que la enseñanza y aprendizaje de matemática se perciben mejor con una estrategia apropiado para cada contenido de la matemática, lo que hace referencia que los profesores de matemática deben seguir un procedimiento y una estrategias apropiada para cada desarrollo de la clase.

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS

5.1. CONCLUSIONES

Primera

El estudiante de matemática cuya finalidad es convertirse en profesor de esta disciplina, no es una persona singular lo único que necesita es tener paciencia capacidad reflexiva y entendimiento absoluto de la realidad contante como teórica; ello significa que su pensamiento siempre debe estar relacionado con los números, además debe tener conocimiento filosófico y epistemológico.

Segunda

Como en cualquier otra disciplina, el estudiante que va a convertirse en profesor de matemática sin duda esta complementado por una serie de creencias sobre la enseñanza y el aprendizaje de esta disciplina, por lo tanto allí está la de importancia de su formación y la forma que le permite convertirse en docente, estas creencias están en relación directa no sólo con su cultura sino también con el conocimiento científico.

Tercera

Como es natural las formas de concebir el conocimiento, la enseñanza y el aprendizaje de la matemática están en relación directa con la epistemología de la matemática, el nivel de conocimiento de la disciplina y la visión que se tenga de la amplitud que el profesor de matemática tiene que desarrollar.

Cuarta

Según los resultados obtenidos en la aplicación de la encuesta sobre creencias y percepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de estudiantes de matemática en la Universidad Nacional del Santa, se concluye que mayoría de los estudiantes en formación para los profesores de matemática suelen recurrir a la matemática de manera casi inconscientes, no valoran o no aplican sus conocimientos en la vida cotidiana.

5.2. SUGERENCIAS

Teniendo en cuenta las consideraciones teóricas expuestas en la presente investigación se sugiere que la Universidad haga una reestructuración curricular donde se incluyan asignaturas relacionadas con la epistemología de la matemática y estudiar con mayor profundidad el significado de la cultura en la especialización de los docentes.

Se sugiere a los docentes de matemática trabajar, con un conjunto importante de contenidos intra o extramatemático que deben ser dominados, según los objetivos de la enseñanza, por todos los alumnos del curso; el cual la meta central de esta fase es hacer que los estudiantes aprendan nuevos conocimientos o dominen nuevos procedimientos matemáticos, y relacionen los contenidos de la matemática en la aplicación de la vida cotidiana en la resolución de sus problemas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1990). Epistemologie et Didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 10, nº 2-3, pp. 241-286.

Artigue, M. (1992). The importance and limits of epistemological work in didactics. En W.

Bazzini, L. (1994). (Editor), Theory and practice in Mathematics Education. Proceedings of the "Fifth international conferencie on systematic cooperation between theory and practice in Mathematics Education. Grado, Italia.

Blanché, R. (1973). La Epistemología. Barcelona: Oikos-Tau.

Bouazzaoui, H. (1988). Conceptions des éléves et des professeurs á propos de la notion de continuité d'une fonction. Thése du Doctorat. Université de Laval.

Brousseau, G. (1989). Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collège. Petit x, nº 21, pp. 47-68.

Brown, C.A. y Borko, H. (1992). Becoming Mathematics Teacher. En D.A. Grouws (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, (pp. -239). New York: Mcmillan

Brown, C.A. y Cooney, T.J. (1985). The importance of meanings and milieu in developing tehories of teaching mathematics. Proceedings of the second TME - Conference Bielefeld.

Brown, J.S., Collins, A. y Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning.

Brown, S.I., Cooney, T.J.; Jones, D. (1990). Mathematics teacher education. En R. Houston

Cañón, C. (1993). La Matemática. Creación y descubrimiento. Madrid: Universidad Pontificia de Comillas.

Carl, I.M. (1989). Essential mathematics for the twenty-first century: the position of the National

Chevallard, Y. (1985). La transposition didactique. Grenoble, La Pensée Sauvage.

Copleston (1960). Historia de la Filosofía. Madrid: Ariel.

Elliot, T.S. (1991). El cambio educativo desde la investigación-acción. Madrid, Morata.

Flores, P. (1998a). Creencias y concepciones de los futuros profesores sobre las Comunicación presentada en PME, Warwick, England.

Cooney, T.J. (1984b). Investigating mathematics teachers' beliefs: The pursuit of perceptions. Paper prepared for short comunications at V ICME, Adelaida

Cooney y Shealy. (1994). Teacher education as a crucible for systematic cooperation between theory and practice. En L. Bazzini. (Ed.), Theory and practice in Mathematics Education. Proceedings of the "Fifth International Conferencie on Systematic Cooperation between Theory and Practice in Mathematics Education, pp. 67-79. Grado, Italia, 1994.

Cooney, T.J. (1994b). Research and teacher education: in search of common ground. Journal for Research in Mathematics Education, Vol 25, No 6 pp. 608-636.

Copes, L. (1979). The Perry development scheme and the teaching of mathematics.

Copleston (1960). Historia de la Filosofía. Madrid: Ariel.

Crawford, K. (1992). Applying theory in teacher education: changing practice in mathematics education. En W. Geeslin y K. Graham. (Eds), Proceedings of the sixteenth PME conference, (pp. 1-161-1-168). Durham, NH. de 1978.

Davis, P. y Hersh, R. (1989). Experiencia matemática. Madrid: MEC, Labor. Original de 1982.

Dossey, J.A. (1992). The nature of mathematics: its role and its influence. En D.A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning. (pp. 39-48). New Yorks: Mcmillan

Dossey, J., Jansson, L., Comiti, C., Jones, G. y Kulkarni, G. (1994). Preservice and inservice teacher education. En C. Gaulin, B.R. Hogdson, D. Wheeler, J. Egsgard (eds.), Proceedings of the 7th International Congress on Mathematical Education, (pp. 134-

Dou, A. (1970). Fundamentos de la matemática. Barcelona: Labor.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. Recherches en Didactique des

Douady, R. (1991). Tool, object, setting, window: Elements for analysing and constructing didactical situations in Mathematics. En: A.J. Bishop y S. Mellin-Olsen (Eds.), Mathematical knowledge: its grouth through teaching. (pp 100-130). Dordrecht: Kluwer A.P. Económica. Original de 1962.

Elliot, J (1993). Estudio del curriculum escolar a través de la investigación interna. Revista

En J. Ponte, J.F. Matos. (Eds.), Proceedings of the eighteenth International Conference for PME, Lisboa, (pp. 144-151, Vol III)

En L. Bazzini (Ed.), Theory and practice in mathematics education. Proceedings of the

Ernest, P. (1986). Social and political values. Mathematics Teacher, nº 116. pp. 16-18.

Ernest, P. (1989a). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. En C. Keitel (Ed.)

Ernest, P. (1989b). The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: a model.

Ernest, P. (1991). Philosophy of mathematics education. London: Falmer Press.

Ernest, P. (1992). The nature of mathematics: Towards a social constructivist account. Science & Education 1, pp. 89-100.

Ernest, P. (1994a). Varietes of constructivism: their metaphors, epistemologies and pedagogical implications. Hiroshima Journal of Mathematics Education 2, pp. 1-14.

Ernest, P. (1994b). What is social constructivism in the psychology of mathematics education?

Escofier, B. y Pagés, J. (1988). Analysis factorielles simples et multiples; objectifs, méthodes et interpretation. Paris: Dunod.

Farnham-Diggory, S. (1994). Paradigms of knowledge and instruction. Review of Educational

Feiman-Nenser, S. y Buchman, M. (1988). Lagunas en las prácticas de enseñanza de los programas de formación del profesorado. En L.M. Villar. (Dir), Conocimiento, creencias y teorías de los profesores. Implicaciones para el curriculum y la formación del profesorado. (pp. 301-314). Alcoy: Marfil.

Ferrater, (1994). Diccionario de términos filosóficos. Barcelona: Ariel.

Ferry G. (1987) Le Trajet de la Formation. Paris: Dunod.

Flores, P. (1997). El profesor de matemática, un profesional reflexivo. En M.I.

Flores, P. (1993). Formación práctica inicial de profesores de matemáticas de secundaria: algunas cuestiones de investigación sobre la planificación de la enseñanza y expectativas y necesidades de formación de los futuros profesores. Memoria de Tercer Ciclo. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Flores, P. (1994). El chiste como facilitador de la comunicación entre educadores matemáticos. En M. De la Fuente, y M. Torralbo, (Eds.). Actas de las Jornadas Andaluzas de Educación Matemática. Córdoba, Universidad de Córdoba.

Flores, P. (1998b). Formación inicial de profesores de matemáticas como profesionales reflexivos. UNO (En prensa).

Flores, P. y Godino, J. D. (1993b). Concepciones sobre la matemática y su enseñanza de los futuros profesores de matemática de secundaria. Ponencia presentada en las IV Jornadas Andaluzas de Educación Matemática. Sevilla.

Flores, P. y Godino, J.D. (1992). Formación de profesores de matemática de enseñanzas medias: Expectativas de los futuros profesores. En E. Navarrete, G. Palomino y M. Serrano (Eds.), Actas de V Jornadas Andaluzas de educación Matemática, (pp. 317-335).

Flores, P. y Godino, J.D. (1995). Aproximación a las concepciones de los estudiantes para profesor de matemática mediante el comentario de un texto. Revista de Educación de la Universidad de Granada. 47-61

Geeslin, K. Graham. (Eds), Proceedings of the sixteenth PME conference, Durham, NH, August 6 - 11, 1992

Godino, J. D. y Batanero, C. (1995). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. Recherches en Didactique des Mathèmatiques Vol 14. 325-355.

Godino, J.D. y Batanero, M.C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. Recherches en Didactique des Mathématiques Vol 14, nº 3, pp. 325-355.

Goldin, G. (1989). Constructivist epistemology and discovery learning in matehmatics.

Green, T.F. (1971). The activities of teaching. New York: Mc Graw Hill.

Grouws, D.A. (1992). Handbook of Research on Mathematics. New York: Mcmillan. Guimaraes, H.M. (1992). Concepçoes, práticas e formaçao de professores. Educaçao

Hersh, R. (1986). Some proposal for reviving the philosophy of mathematics. En T. Tymoczko, (Ed.), New Direction in the Philosophy of Mathematics (pp. 9-28). Boston: Birkauser.

Hodder, I. (1994). The interpretation of documents and material culture. En N.K. Denzin y Y.S.

Houston, R. (Ed.), (1990). Handbook of research on teacher education. New York: Mcmillan. Hoyles, C. (1992). Illumination and reflections - Teachers, methodologies and Mathematics. En Interuniversitaria de Formación del Profesorado, nº 10, pp. 45-68.

Journal of Education for Teaching. Vol 15, nº 1, pp. 13-33.

Joyce, B. y Weil, M. (1985). Modelos de enseñanza. Madrid: Anaya 2.

Kilpatrick, J. (1987). What constructivism might be in mathematics education. En J. Bergeron, H. Herscovics, C. Kieran (Eds.), Proceedings of the Eleventh PME Conference, Vol I. (pp. 3-27).

Kilpatrick, J. (1994). Historia de la investigación en educación matemática. En J. Kilpatrick, L.

Kline, M. (1985). La pérdida de la certidumbre. Madrid: Siglo XXI.

Kuhn, T.S. (1975). La estructura de las revoluciones científicas. Madrid: Fondo de Cultura

Lakatos, I. (1978). Pruebas y Refutaciones. Madrid: Alianza Universidad. Original de 1976. Lakatos, I. (1981). Matemática, ciencia y epistemología. Madrid: Alianza Universidad. Original

Lerman, S. (1983). Problem solving or knowledge centred: the influence of philosophy on mathematics teaching. International Journal of Mathematics and Science Technologic,

Lerman, S. (1989). Constructivism, mathematics and mathematics education. Educational

Lerman, S. (1994a). Metaphors for mind and metaphors for teaching and learning mathematics.

Lerman, S. (1994b). Towards a unified space of theory-and-practice in Mathematics teaching: a research perspective. En L. Bazzini. (Ed.), Theory and practice in Mathematics Education. Proceedings of the "Fifth International Conferencie on Systematic Cooperation between Theory and Practice in Mathematics Education, (pp. 133-142). Grado, Italia.

Lincoln. (Eds), Handbook of Qualitative Research. (pp. 392-402), London: Sage publications.

Llinares S. (1991b). La naturaleza de la comprensión de las nociones matemática curriculares: variables en la formación del profesor de matemática. En C. Marcelo (Ed.) El estudio de caso en la formación del profesorado y la investigación didáctica. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Sevilla.

Llinares, S. (1989). Las creencias sobre la naturaleza de la matemática y su enseñanza en estudiantes para profesores de primaria: dos estudios de casos. Tesis doctoral inédita. Universidad de Sevilla.

Llinares, S. (1991a). Los mapas cognitivos como instrumento para investigar las creencias de los profesores en formación. En C. Marcelo (Coord.) La investigación sobre la formación del profesorado. Métodos de investigación y análisis de datos. Buenos Aires: Cincel.

Llinares, S. (1991c). La Formación de profesores de matemática. Sevilla: GID.

Llinares, S. (1993). Aprender a enseñar matemática. Conocimiento de contenido pedagógico y entornos de aprendizaje. En L. Montero, y J.M. Vez (Eds.) Las didácticas específicas en la formación del profesorado. Santiago de Compostela: Tórculo Edicións.

Llinares, S. (1995). Conocimiento profesional del profesor de matemática: Conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función.

Conferencia invitada en el IV Encontro de Investigaçao em Educaçao Matemática. Luso. Portugal.

Llinares, S. y Sánchez, M.V. (1987). Las creencias sobre la matemática y la enseñanza de la matemática en profesores de EGB en formación. En L.M. Villar (Ed), Conocimiento, creencias y teorías de los profesores. Implicaciones para el curriculum de formación de profesores. Alcoy: Marfil.

Llinares, S., Sánchez, V., García, M. y Escudero, I. (1995). Creencias y aprender a enseñar matemáticas. Servicio de publicaciones de la universidad de Sevilla.

Marcelo, C. (1987). El pensamiento del profesor. Barcelona: Ceac.

Marcos, F. (1988). El comentario lingüístico. Metodología y práctica. Madrid: Cátedra. Mayerson, (1977). Conception of knowledge in mathematics: interaction with and application to

Mendoza B. (2008) Matemática y sus Historias, Segunda Edición , Mexico

Mayerson, (1977). Conception of knowledge in mathematics: interaction with and application to a teaching methods course. Tesis doctoral inédita. Universidad de New York y Buffalo.

Ortega y Gasset, J. (1986). Ideas y creencias. Cuadernos de Pedagogía. [Original de 1934]

Pajares, M.F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: cleaning unp a messy contruct.

Perry, W.G. (1970). Forms of intellectual and ethical development in the college years. New York: Holt, Rinehart y Winston.

Perry, W.G. (1988). Different wordls in the same classroom. En P. Ramsden, (Ed.) Improving learning. New perspectives. (pp. 145-161). Londres: Kogan Page, Ltd.

Piaget, J. (1977) Epistemología genética. Buenos Aires. Salpín, S.A. (Edición francesa de 1970). Polya, G. (1966). Matemática y razonamiento plausible. Madrid: Tecnos.

Perry, W.G. (1970). Forms of intellectual and ethical development in the college years. New York: Holt, Rinehart y Winston.

Peterson (1989). Teachers' pedagogical content beliefs in mathematics. Paper presented en AERA, Washington, D.C.

Polya, G. (1966). Matemática y razonamiento plausible. Madrid: Tecnos.

Ponte, J.P. (1992). Concepçoes dos professores de matemática e processos de formaçao.

Ponte, J.P. (1994a). Mathematics teachers´ professional knowledge. En J. Ponte, J.P. Matos, (Eds.), Proceedings of the eighteenth International Conferencie for PME. (pp. 195-210) Lisboa.

Ponte, J.P. (1994b). "Knowledge, beliefs and conceptions in mathematics teaching and learning".

Ponte, J.P., Matos, J.F., Guimaráes, H.M., Leal, L.C. y Canavarro, A.P. (1994). Teachers' and students' views and attitudes towards a new mathematics curriculum: a case study. Educational Studies in Mathematics 26, pp. 347-365.

Pozo, J.I. (1989). Teorías cognitivas del aprendizaje. Madrid: Morata.

Proceedings of the XIII International Conference PME, Vol II, (pp. 15--22). Paris. Gómez, B. (1991) Las matemáticas en el proceso educativo. En A. Gutierrez, (Ed.) Área de conocimiento Didáctica de la Matemática. (pp. 59-104). Madrid, Síntesis.

Review of Educational Research Vol 62, nº 3, pp. 307-332.

Rice, M. (1992). Teacher change: a constructivist approach to professional development. W.

Rico, L. (1997b) (Ed.). La educación matemática en la enseñanza secundaria.

Rico, L. (1997a) (Ed.). Bases teóricas del currículo de matemática en educación secundaria. Madrid, Síntesis.

Rico, L. (1992). Plan para la Formación Inicial de Profesores de Matemática en Enseñanza Secundaria. Proyecto Docente. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Rico, L. y Coriat, M. (1992). La asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato en la Universidad de Granada. Comunicación presentada en la 1ª Conferencia Internacional Las Didácticas Específicas en la Formación del Profesorado. Santiago de Compostela, Julio 1992.

Rico, L. y Flores, P. (1997) Didáctica de la matemática y formación del profesorado. Ponencia en el II Congreso de Formación del Profesorado. Granada, 9-12 abril.

Rico, L. y Gutierrez, J. (Eds.) (1994). Formación científico-didáctica del profesor de matemáticas de secundaria. Granada: Instituto de Ciencias de la Educación, Uiversidad de Granada.

Rico, L. y Sierra, M. (1991). La comunidad de educadores matemáticos. En A. Gutierrez (Ed.).

Robert, A. y Robinet, J. (1989). Representations des enseignants de mathématiques sur les matémathiques et leur enseignement. Cahier de DIDIREM. Université Paris VII. IREM. Paris.

Román, M. y Díez, E. (1989). Curriculum y Aprendizaje. Un modelo de Diseño Curricular de aula en el marco de la Reforma. Pamplona: Itaka. Dirección Provincial del MEC de Navarra.

Ruiz, L. (1994). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Tesis doctoral inédita. Universidad de Granada.

Russell, B. (1983). El conocimiento humano. Barcelona: Orbis.

Schön, D. (1993). Teaching and learning as a reflective conversation. En L. Montero, y J.M.

Schön, D.A. (1992). Formación de profesionales reflexivos. Paidós, Madrid.

Schram, P., Wilcox, S., Lanier, P., Lappan, G. y Even, R. (1988). Changing mathematical conceptions of pre-service teachers; a content and pedagogical intervention. Paper presented of AERA, New Orleans, April 1988.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22. (pp. 1- 36)

Shram, P. y Wilcox, S.K. (1988). Changing preservice teachers' conceptions of mathematics learning. En J. Behr, C.B. Lacampagne y M.M. Wheeler, (Eds.), PME-NA: Proceedings of the tenth annual meeting (pp. 349-355). Dekalb, IL: Northern Illinois University.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growt in teaching. Educational

Shulman, L.S. (1993). Renewing the pedagogy of teacher education: the impact of subject- spedific conceptions of teaching. En L. Montero, J.M. Vez, (Eds.), Las didácticas específicas en la formación del profesorado. (pp. 53-69). Santiago de Compostela: Tórculo Edicións.

Skemp, R.R (1978). Relational understanding and instrumental understanding. Arithmetic Teacher, Nov 1978. pp 9-15.

Smyth, J. (1991). Una pedagogía crítica de la práctica en el aula. Revista de Educación nº 294, 275-300. Studies in Mathematics, 20, pp. 211-223.

Steffe, L.P. (1992). Building a Foundation. Journal for Research in Mathematics Education, vol 23, nº 2, pp. 183-186.

Stenhouse L. (1987). La investigacion como base de la enseñanza. Seleccion de articulos del autor por Ruduck y Hopkins, Madrid: Morata. Original de 1985.

Thompson, A.G. (1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. Educational Studies in Mathematics, 15, pp. 105-127.

Tymoczko, T. (1992). Humanistic and Utilitarian Aspects of Mathematics. ICME VII Tymoczko, T. (1986). New Direction in the Philosophy of Mathematics. Boston: Birkauser.

Vergnaud, G. (1990). Epistemology and psychology of mathematics education. En P. Nesher y J.

Vez, (Eds.), Las didácticas específicas en la formación del profesorado. (pp. 5-18). Santiago de Compostela: Tórculo Edicións.

Vicente, L. (1995). Palabras y creencias. Murcia: Universidad de Murcia. Vol XXXIV, No 3, pp. 3-9.

Von Glasersfeld, E. (1989a). Cognition, construction of knowledge, and teaching. Synthese 80, pp. 121-140.

Von Glasersfeld, E. (1989b). Constructivism in education. En T. Husen y N. Postlethwaite, (Eds.), International Encyclopedia of Education (pp. 162-163). Oxford: Pergamon.

Von Glasersfeld, E. (1995). Introducción al constructivismo radical. En Watzlawick (Comp.) La realidad inventada. (pp. 20-37). Barcelona: Gedisa. (Original de 1981)

W. Geeslin y K. Graham. (Eds), Proceedings of the sixteenth PME Conference. Durham, (pp. 3-263 - 286)

White, L.A. (1983). La ciencia de la cultura. Un estudio sobre el hombre y la civilización.

Whitney, F.L. (1983). Elementos de investigación. Barcelona: Ediciones Omega.

Wittgenstein, L. (1988). Investigaciones filosóficas. Barcelona: Crítica, Original de 1953.

Zeichner, K. (1983). Alternative paradigms of teacher education. Journal of Teacher Education.

Zeichner. K. y Gore, J. (1990). Teacher socialization. En W.R. Houston, (Ed.), Handboock of research on teacher education. (pp. 329-348). New York: Macmillan.